威布尔分布参数估计在 Excel 中的实现方法研究

史景钊，花恒明，李祥付

（河南农业大学机电工程学院，郑州　450002）

摘要：三参数威布尔分布的参数估计比较复杂，大多数估计方法都需要编程计算。推导了相关系数优化法求解三参数威布尔分布位置参数的公式，并利用 Ms Excel 强大的规划求解功能对该公式进行求解，实现了位置参数估计的非编程求解，同时利用图表功能实现了形状参数和尺度参数的非编程求解。实例证明该法方便、快捷，可以满足估计精度。

关键词：机械设计；可靠性；威布尔分布；参数估计；Excel

中图分类号：TB114.3　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1674-2850(2009)03-0579-6

Study on implementation method of Weibull distribution parameter estimation in Excel

SHI Jingzhao，HUA Hengming，LI Xiangfu

(*College of Mechanical and Electrical Engineering，Henan Agricultural University，Zhengzhou*　450002，*China*)

Abstract：The parameter estimation of 3-parameter Weibull distribution is very complicated，and most estimation methods need programming calculation. This paper derives the formula of solving the location parameter of 3-parameter Weibull distribution by relative coefficient optimization method and uses the powerful programming solver of Ms Excel to solve the formula，thus it realizes the non-programming solution of location parameter estimation. Meanwhile，it achieves the non-programming solution of shape parameter and scale parameter by using the chart features. Examples prove that the method is easily accessible and efficient，and can meet the estimation precision.

Key words：mechanical design；reliability；Weibull distribution；parameter estimation；Excel

0　引言

威布尔分布是瑞典物理学家 WEIBULL[1]分析材料强度时，在实际经验的基础上推导出来的分布形式，国内外大量研究表明：三参数威布尔分布比对数正态分布往往能更准确地描述结构疲劳寿命或腐蚀损伤的概率分布[2]，物理意义更加合理；在以损耗为特征的机械零件寿命评估中，采用三参数威布尔分布比采用二参数威布尔分布拟合精度更高。因此，三参数威布尔分布在强度与环境研究领域及机械零件磨损寿命评价中得到越来越广泛的应用。在农业机械的强度设计中也经常要用到威布尔分布。

威布尔分布的参数估计方法有很多，国内外一直有人在进行相关研究[3~8]，现有几十种参数估计方法，但多数只能用于形状参数和尺度参数的估计。在众多的估计方法中，能用于三参数估计的并不多，见诸文献的有极大似然估计法、最大相关系数优化法、概率权重矩法、灰色估计法、图估计法等，除图估计法外，其他方法大多数都计算复杂、应用不便，即便是计算机水平发达的今天，也只能通过 Matlab 或其他计算机语言编程计算。Excel 提供了超强的数学运算、统计分析等实用程序，利用它的规划求解功能可以快速、高效地求解三参数威布尔分布的参数估计问题。

1　三参数威布尔分布模型

若某产品寿命 T 服从威布尔分布，则其寿命分布函数为：

作者简介：史景钊（1963—），男，副教授，主要研究方向：农业装备及其可靠性．E-mail：jingzhaos@gmail.com

$$F(t)=1-\exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{m}\right],\quad t\geqslant\gamma. \tag{1}$$

式中，m 为形状参数，$m>0$；η 为尺度参数，$\eta>0$；γ 为位置参数，也称最小寿命，表示产品在 γ 以前不会失效，对于产品寿命有 $\gamma\geqslant 0$，当 $\gamma=0$ 时，退化为二参数威布尔分布；t 为产品的工作时间，$t\geqslant\gamma$.

当 $m<1$ 时，威布尔分布的失效率为递减型，适合于建模早期失效；当 $m=1$ 时，失效率为常数，即退化为指数分布，适合于建模随机失效；当 $m>1$ 时，失效率为递增型，适合于建模磨耗或老化失效。

设有 n 个产品进行寿命试验数据，按失效时间先后得到的寿命数据失效时间（顺序统计量）为 $t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_n$，对应的累计失效概率（经验分布函数）为 $F(t_1)\leqslant F(t_2)\leqslant\cdots\leqslant F(t_n)$. 其中到第 i 个产品失效时的累计失效概率 $F(t_i)$ 可用中位秩算法求得：

$$F(t_i)\approx\frac{i-0.3}{n+0.4}. \tag{2}$$

根据失效时间和累计失效概率即可用各种方法对其参数进行估计。

2 最大相关系数优化法

对式（1）做变形处理，并取两次自然对数得到：

$$\ln\ln\frac{1}{1-F(t)}=m\ln(t-\gamma)-\ln\eta^{m}. \tag{3}$$

令 $$y=\ln\ln\frac{1}{1-F(t)},\ x=\ln(t-\gamma),\ B=\ln\eta^{m},$$

于是，式（3）化为线性方程

$$y=mx-B. \tag{4}$$

令 $$x_i=\ln(t_i-\gamma);\ y_i=\ln\ln\frac{1}{1-F(t_i)},\ i=1,2,\cdots,n,$$

则在 γ 已知时，可利用最小二乘法进行回归求出 m 和 B，进而求出尺度参数 $\eta=\exp\left(\frac{B}{m}\right)$.

x 与 y 间的相关系数 $R(x,y)$ 为：

$$R(x,y)=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\cdot\bar{y}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2\right)}, \tag{5}$$

式中，$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$.

由式（5）可知，相关系数 $R(x,y)$ 是位置参数 γ 的函数，要求 γ 应是使 $R(x,y)$ 最大的那一个。根据求极值的方法，使 $\mathrm{d}|R(x,y)|/\mathrm{d}\gamma=0$ 的 γ 即为所求，$\mathrm{d}|R(x,y)|/\mathrm{d}\gamma=0$ 等价于 $\mathrm{d}R^2(x,y)/\mathrm{d}\gamma=0$.

若令 $$v=\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\cdot\bar{y}\right),\ u=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2\right),$$

则有 $$\frac{\mathrm{d}R^2(x,y)}{\mathrm{d}\gamma}=\frac{uv'-vu'}{u^2},$$

即需满足 $$uv'-vu'=0.$$

因为
$$v'=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\gamma}=2(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\cdot\bar{y})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}[\sum_{i=1}^{n}\ln(t_i-\gamma)y_i-\bar{y}\sum_{i=1}^{n}\ln(t_i-\gamma)]$$
$$=2(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\cdot\bar{y})\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{y}-y_i}{t_i-\gamma},$$
$$u'=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\gamma}=(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\gamma}\{\sum_{i=1}^{n}\ln^2(t_i-\gamma)-\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}\ln(t_i-\gamma)]^2\}$$
$$=2(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2)\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{x}-x_i}{t_i-\gamma};$$

所以
$$uv'-vu'=2(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2)(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\cdot\bar{y})\Big[(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2)\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{y}-y_i}{t_i-\gamma}-(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\cdot\bar{y})\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{x}-x_i}{t_i-\gamma}\Big].$$

又 $0<|R|\leqslant 1$，所以 $(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2)\neq 0$，否则 $R=\infty$；$(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\cdot\bar{y})\neq 0$，否则 $R=0$.
因此，只有
$$(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2)\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{y}-y_i}{t_i-\gamma}-(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\cdot\bar{y})\sum_{i=1}^{n}\frac{\bar{x}-x_i}{t_i-\gamma}=0,\qquad(6)$$
满足式（6）的 γ 即为所求的位置参数。

3 用 Excel 进行参数估计

式（6）所表示的方程十分复杂，解该方程一般是通过编程，用数值解法求出 γ，然后再用最小二乘法或其他方法求解形状参数和尺度参数。Excel 具有强大的统计和计算功能，其“规划求解”功能更是求解最优化问题的强有力工具，式（6）所表示的方程利用 Excel 的“规划求解”功能很容易解出，然后再利用其散点图的趋势线功能即可求出形状参数和尺度参数。通过实例，就相关系数优化法，用 Excel 进行求解。

例：选取 5 台某产品进行可靠性试验，失效时间分别是 27，32，36，42，49 h，已知产品寿命服从威布尔分布，试估计分布参数。

在 Excel 上用相关系数优化法求解威布尔分布参数的方法是先用“规划求解”功能估计位置参数，再用“数据图表”功能估计位置参数和尺度参数，对于上述试验数据，具体步骤如下。

3.1 准备数据表

根据图 1 准备数据表。

1）在 A2～A6 单元格中输入产品失效的顺序号 1～5；

2）在 B2～B6 单元格中输入产品的失效时间 27，32，36，42，49 h；

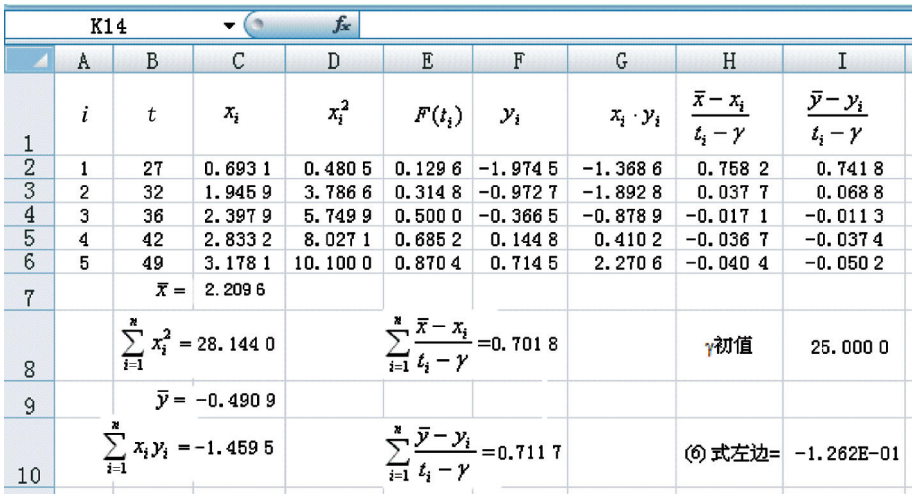
3）在 I8 单元格中输入位置参数的迭代初值，初值可选择接近于第一个失效时间，也可用图估计法的估计值作为初值；

4）在 C2 单元格中输入公式"=LN(B2－I8)"，用填充柄填充 C3～C6 单元格，C2～C6 单元格的值为 x_i，即 $\ln(t_i-\gamma)$；

5）在 D2 单元格中输入公式"=C2＊C2"，用填充柄填充 D3～D6 单元格，D2～D6 单元格的值为为 x_i^2；

6）在 E2 单元格中输入公式"=(A2－0.3)/5.4"，用填充柄填充 E3～E6 单元格，E2～E6 单元格的值为 $F(t_i)$，这里 $F(t_i)$ 采用中位值算法，即 $F(t_i)=(i-0.3)/(n+0.4)$；

7）在 F2 单元格中输入公式"=LN(LN(1/(1－E2)))"，用填充柄填充 F3～F6 单元格，F2～F6 单



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	i	t	x_i	x_i^2	$F(t_i)$	y_i	$x_i \cdot y_i$	$\frac{\bar{x}-x_i}{t_i-\gamma}$	$\frac{\bar{y}-y_i}{t_i-\gamma}$
2	1	27	0.693 1	0.480 5	0.129 6	-1.974 5	-1.368 6	0.758 2	0.741 8
3	2	32	1.945 9	3.786 6	0.314 8	-0.972 7	-1.892 8	0.037 7	0.068 8
4	3	36	2.397 9	5.749 9	0.500 0	-0.366 5	-0.878 9	-0.017 1	-0.011 3
5	4	42	2.833 2	8.027 1	0.685 2	0.144 8	0.410 2	-0.036 7	-0.037 4
6	5	49	3.178 1	10.100 0	0.870 4	0.714 5	2.270 6	-0.040 4	-0.050 2
7		$\bar{x}=$	2.209 6						
8		$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 =$ 28.144 0			$\sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}-x_i}{t_i-\gamma} =$ 0.701 8			γ初值	25.000 0
9		$\bar{y}=$ -0.490 9							
10		$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i =$ -1.459 5			$\sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{y}-y_i}{t_i-\gamma} =$ 0.711 7			(6) 式左边=	-1.262E-01

图 1 位置参数估计数据准备表

Fig. 1 Data preparation for location parameter estimation

元格的值为 y_i，即 $\ln\ln\frac{1}{1-F(t_i)}$；

8) 在 G2 单元格中输入公式 " = C2 * F2"，用填充柄填充 G3～G6 单元格，G2～G6 单元格的值为$x_i \cdot y_i$；

9) 在 C7 单元格中输入公式 " = AVERAGE(C2：C6)"，C7 单元格的值为 $\bar{x}$；

10) 在 C8 单元格中输入公式 " = SUM(D2：D6)"，C8 单元格的值为 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$；

11) 在 C9 单元格中输入公式 " = AVERAGE(F2：F6)"，C9 单元格的值为 $\bar{y}$；

12) 在 C10 单元格中输入公式 " = SUM(G2：G6)"，C10 单元格的值为 $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$；

13) 在 H2 单元格中输入公式 " =（C7－C2)/(B2－I8)"，用填充柄填充 H3～H6 单元格，H2～H6 单元格的值为$\frac{\bar{x}-x_i}{t_i-\gamma}$；

14) 在 I2 单元格中输入公式 " =（C9－F2)/(B2－I8)"，用填充柄填充 I3～I6 单元格，I2～I6 单元格的值为$\frac{\bar{y}-y_i}{t_i-\gamma}$；

15) 在 F8 单元格中输入公式 " = SUM(H2：H6)"，F8 单元格的值为 $\sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}-x_i}{t_i-\gamma}$；

16) 在 F10 单元格中输入公式 " = SUM(I2：I6)"，F10 单元格的值为 $\sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{y}-y_i}{t_i-\gamma}$；

17) 在 I10 单元格中输入公式 " =(C8－5 * C7^2) * F10－(C10－5 * C7 * C9) * F8"，I10 单元格的值就是式（6）的左边。

其他文字仅用于说明，与求解关系不大，可以不填。

3.2 使用“规划求解”功能估计位置参数γ

1) 选择“工具→规划求解”功能打开规划求解参数对话框，目标单元格设为 I10，目标值设为 0，可变单元格设为 I8：B2；

2) 对于产品寿命有 $0 \leqslant \gamma < t_1$，故单击约束条件“添加”按钮，添加约束条件：I8<=B2 和 I8>=0；

3）单击“求解”按钮，即可获得最大相关系数下的位置参数 $\gamma=20.239\ 5$，如图 2 所示，此时可获得最大相关系数 $R(x,y)=0.999\ 508\ 78$，相关系数可用 CORREL(X, Y)函数获得。

L11 f_x

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	i	t	x_i	x_i^2	$F(t_i)$	y_i	$x_i \cdot y_i$	$\frac{\bar{x}-x_i}{t_i-\gamma}$	$\frac{\bar{y}-y_i}{t_i-\gamma}$
2	1	27	1.911 1	3.652 3	0.129 6	-1.974 5	-3.773 4	0.118 8	0.219 4
3	2	32	2.464 7	6.075 0	0.314 8	-0.972 7	-2.397 4	0.021 2	0.041 0
4	3	36	2.757 5	7.603 8	0.500 0	-0.366 5	-1.010 7	-0.002 7	-0.007 9
5	4	42	3.080 1	9.487 0	0.685 2	0.144 8	0.445 9	-0.016 8	-0.029 2
6	5	49	3.359 0	11.282 9	0.870 4	0.714 5	2.399 9	-0.022 4	-0.041 9
7		$\bar{x}=$	2.714 5						
8		$\sum_{i=1}^{n} x_i^2=$	38.101 0		$\sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}-x_i}{t_i-\gamma}=$	0.098 1		γ初值	20.239 5
9		$\bar{y}=$	-0.490 9						
10		$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i=$	-4.335 7		$\sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{y}-y_i}{t_i-\gamma}=$	0.181 4		(6)式左边=	5.309E-07

图 2 规划求解结果

Fig. 2 Results of programming solution

3.3 使用图表功能求形状参数 m 和尺度参数 η

1）插入散点图，横坐标为 x_i，纵坐标为 y_i；

2）在散点图上添加趋势线，回归模型选择“线性”，并选择“显示公式”和“显示 R^2 值”；

3）Excel 自动绘制回归直线，并把结果显示在图上，结果如图 3 所示。其中斜率 1.848 6 即为形状参数 m，而 5.508 8 即为 $\ln\eta^m$，故 $\eta=\exp\left(\frac{5.508\ 8}{1.848\ 6}\right)=19.69$.

用数据图图表功能的优点是对数据的分散性一目了然，可以清楚地看出哪些数据偏离直线较远，若不用数据图表，也可用SLOPE(Y, X)函数获得斜率，即形状参数估计值，用INTERCEPT(Y, X)函数获得常数项即 $\ln\eta^m$ 估计值。

4 结论

1）三参数威布尔分布的参数估计较二参数威布尔分布的参数估计更为复杂，用 Excel 解决三参数威布尔分布的参数估计问题，实用方便；

2）用“规划求解”进行位置参数的估计时，要注意选择好迭代精度和初值，若精度和初值选择不合适，可能得不到最满意的解，建议初值尽可能离第一个失效时间近一些，精度不低于 10^{-7}；

3）失效概率有中位秩算法、平均秩算法等，采用的算法不一样，估计结果也会稍有不同。

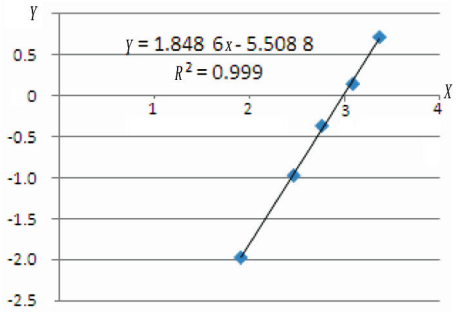


图 3 回归结果

Fig. 3 Results of least-squares regression

[参考文献] (References)

[1] WEIBULL W. A statistical distribution function of wide applicability[J]. Journal of Applied Mechanics Reliability, 1951, 18(3): 293～297.

[2] HALLINAN A J. A review of the Weibull distribution[J]. Journal of Quality Technology, 1993, 25(2): 85～93.

[3] ADATIA A, CHART L K, ROBUST. Estimators of the 3-parameter Weibull distribution[J]. IEEE Transactions on

Reliability，1985，34(3)：358～369.

[4] GRAN G W. Moment estimators for the 3-parameter Weibull distribution[J]. IEEE Transactions on Reliability，1988，37(4)：360～363.

[5] 蒋卉，刘瑞元. 用插值法求威布尔分布位置参数估计[J]. 青海大学学报（自然科学版），2003，21（3）：53～57.
JIANG H，LIU R Y. Methods to estimate location parameters of Weibull distribution with interpolation method[J]. Journal of Qinghai University (Natural Science)，2003，21(3)：53～57. (in Chinese)

[6] 朱铭扬. 三参数威布尔分布的参数估计[J]. 江苏技术师范学院学报，2006，12（6）：31～34.
ZHU M Y. Parameter estimating for three-parameter Weibull distribution[J]. Journal of Jiangsu Teachers University of Technology，2006，12(6)：31～34. (in Chinese)

[7] 胡恩平，罗兴柏，刘国庆. 三参数 Weibull 分布几种常用的参数估计方法[J]. 沈阳工业学院学报，2000，19（3）：88～94.
HU E P，LUO X B，LIU G Q. Parameter estimating methods for the three parameters Weibull distribution[J]. Journal of Shenyang Institute of Technology，2000，19(3)：88～94. (in Chinese)

[8] 严晓东，马翔，郑荣跃，等. 三参数威布尔分布参数估计方法比较[J]. 宁波大学学报（理工版），2005，18（3）：301～305.
YAN X D，MA X，ZHENG R Y，et al. Comparison of the parameters estimation methods for 3-Parameter Weibull distribution[J]. Journal of Ningbo University (Natural Science & Engineering Edition)，2005，18(3)：301～305. (in Chinese)