基于现金折扣与缺货策略下的零售商库存控制研究

吴进红，周　敏

（中国矿业大学管理学院　江苏徐州　221116）

摘要：将供应商提供延期支付纳入供应商-零售商库存控制系统，构建基于现金折扣与缺货策略下的库存控制模型。将库存总成本分为采购成本、存储成本、订单成本、缺货成本、库存保持成本、利息收益以及利息支出7个方面，并依据供应商给予的现金折扣期限与采购期的比较、采购量与需求量的比较分为4种情况分别求解。最后得出基于不同库存策略（T_i，Q_i）下的最优库存总成本。

关键词：管理科学与工程；库存控制；延期支付；现金折扣；缺货

中图分类号：C931.2　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1674-2850(2010)11-2238-5

Retailers' inventory control study based on cash discount and lack of inventory strategy

WU Jinhong，ZHOU Min

（*School of Management*，*China University of Mining and Technology*，*Xuzhou*，*Jiangsu*　221116，*China*）

Abstract：This paper brings deferred payment provided by suppliers into the supply-retail system，establishes the inventory control model based on cash discount and the lack of inventory strategy. It divides the total costs of its inventory into purchase costs，storage costs，order costs，shortage costs，inventory keeping costs，interest income and interest expense，and solves the sub-four cases based on the comparison of the cash discount period and purchase period，the comparison of the purchases and the demands，finally gets the optimal total cost under different inventory policy（T_i，Q_i）.

Key words：management science and engineering；inventory control；deferred payment；cash discount；out of stock

0　引言

随着竞争的激烈化和世界经济一体化的发展，如何更加科学合理地对企业的“人、机、环、管”等因素进行配置，以降低成本提高利润成为研究学者与商业企业关注的关键。库存总成本作为企业产品成本的主体部分，它的合理控制关系着企业利润及服务声誉等各个方面。因此，对库存系统进行有效控制，制定科学库存策略便显得十分重要。

对于零售商库存控制的研究以及库存策略的选择，已经有较多学者考虑多种因素进行了研究。比较典型的随机库存策略有 t 循环策略、（s，R）策略、（t，s，S）策略等；王爽心等[1]基于 Matlab/Simulink 动态模拟了变质的（t，s，S）策略下的库存系统的入库、出库时机和数量；胡幼华等[2]考虑了享有批量折扣的库存系统，并利用计算机仿真技术来进行最佳库存策略选择；另外，胡幼华等[3]考虑了延期交货情况下的随机库存系统，利用计算机仿真为物流管理选定最佳库存策略；GOYAL[4]考虑延期支付下的 EOQ 模型；JAMAL 等[5]研究了延期支付情况下变质产品在允许缺货条件下的订货策略等。在总结上述文献基础上[6~8]，考虑延期支付下现金折扣政策[9]、允许缺货等因素，尽可能拟合现实复杂库存控制条件，得出了上述政策下最优订购数量与采购周期，以期为零售商库存控制提供指导。

作者简介：吴进红（1986—），女，硕士研究生，主要研究方向：物资管理与供应链管理

通信联系人：周敏，教授，主要研究方向：管理科学与工程、产业经济与组织、生产运作与优化、物流与供应链以及企业战略与组织. E-mail：xzkdzm@163.com

1 问题描述及前提假设

所研究的系统由一个零售商与若干供应商组成，零售商存在有 n 种产品。零售商采取定期补货的 (T_i, Q_i) $(i=1, 2, \cdots, n)$ 补货模式，考虑产品存在缺货的情况，在延期付款下的现金折扣政策下决定最优补货策略。

1.1 假设条件

1) 假设采购提前期 L 为 0；

2) 假设 T 采购周期内客户需求率为常数 D；

3) 考虑延期支付情况下供应商提供现金折扣政策的情况；

4) 单位库存年支付利息大于单位库存年收益利息；

5) 假设各个供应商提供的现金折扣期限与现金折扣比率相同；

6) 假设一种产品只由一种供应商提供，但是一个供应商可以提供多种产品；

7) 客户需求得不到满足时即为缺货发生，产生缺货成本。

基于上述假设，原系统的子系统可以看成是由一个供应商和一个零售商组成，如图 1 所示。



图 1 简化供应-零售系统模型图

Fig. 1 Simplified supply-retail system model

1.2 变量描述

表 1 变量说明

Tab. 1 Variable declaration

符号	变量描述	符号	变量描述	符号	变量描述
D_i	第 i 种产品的需求率	I_z	单位库存年支付利息	M	现金折扣期限
ORD	单位订货成本	h	单位产品单位时间保管费	R	现金折扣比率
C_i	i 产品采购成本	TC	年度总费用	TC_i	i 产品的年度总费用
P_i	i 产品销售价格	T_i	i 产品补充周期	Q_i	i 产品的采购量
I_s	单位库存年收益利息	k	单位产品单位时间的缺货费	Cs_i	产品 i 缺货成本
Cb_i	产品 i 库存保持成本	Ch_i	库存 i 存储成本	Lz_i	利息支出
Ls_i	利息收益	X_i	i 产品 T 采购期需求量	$I_i(t)$	i 产品 t 时刻库存量
c_{i1}	i 单位库存持有成本				

2 库存模型

基于问题描述及前提假设，零售商 TC_i 由采购成本 C_i，订单成本 ORD，库存保持成本 Cb_i，存储成本 Ch_i，缺货成本 Cs_i，利息收益 Ls_i 与利息支出 Lz_i 组成。即 $TC_i=(C_i+ORD+Ch_i+Cb_i+Cs_i+Lz_i-Ls_i)/T_i$. 依据简化模型，单产品即简化为

$$TC_i=(C+ORD+Ch+Cb+Cs+Lz-Ls)/T. \tag{1}$$

下文以此简化情形计算。

由于客户需求率为常数 D，可知 $X=DT$.

当 $Q_i>X_i$ 时，$(Q_i>X_i)$ 为正，总成本为 $(C+ORD+Ch+Cb+Lz-Ls)/T$；当 $Q_i<X_i$ 时，$(Q_i<X_i)$ 为负，总成本为 $(C+ORD+Ch+Cs+Lz-Ls)/T$.

令
$$\delta(y)=\begin{cases}0y<0,\\ 1/2y=0,\\ 1y>0.\end{cases}$$

由此可以得到缺货条件下 i 产品的年度总费用 TC_i 如式 (2) 所示：

$$\min \mathrm{TC}_i = \{C + \mathrm{ORD} + \delta(Q-X)[\mathrm{Cb}+\mathrm{Ch}] + \delta(X-Q)[\mathrm{Cs}+\mathrm{Ch}] + \mathrm{Lz} - \mathrm{Ls}\}/T. \quad (2)$$

2.1 延期支付下的现金折扣政策

由于供应商允诺零售商在M点支付货款时，享受一定的现金折扣。由此可得，零售商每一订货周期采购成本为$C=(1-R)Qc$.

2.1.1 现金折扣期限$M<T$

零售商在M点付款，且现金折扣期限小于采购期限T_i，则零售商采购周期内i产品的利息收益与利息支出如式（3）、式（4）所示：

$$\mathrm{Lz} = c(1-R)I_z\int_M^T I(t)\mathrm{d}t = \frac{c(1-R)I_zD(T-M)^2}{2}, \quad (3)$$

$$\mathrm{Ls} = pI_s\int_0^M Dt\,\mathrm{d}t = \frac{pI_sDM^2}{2}. \quad (4)$$

2.1.1.1 $Q>X$

若$Q-X>0$，则由上述可得i产品年度总费用如下所示：

$$\mathrm{TC}_1 = \frac{(1-R)Qc + \mathrm{ORD} + c_1(Q-DT) + \frac{1}{2}hDT^2 + c(1-R)I_zD(T-M)^2/2 - pI_sDM^2/2}{T}. \quad (5)$$

2.1.1.2 $Q<X$

若$Q-X<0$，则由上述可得i产品年度总费用如下所示：

$$\mathrm{TC}_2 = \frac{(1-R)Qc + \mathrm{ORD} + k(DT-Q) + \frac{1}{2}hQ^2 + c(1-R)I_zD(T-M)^2/2 - pI_sDM^2/2}{T}. \quad (6)$$

2.1.2 现金折扣期限$M>T$

零售商在M点付款，且现金折扣期限大于采购期限T，则零售商采购周期内i产品的利息收益与利息支出如下所示：

$$\mathrm{Lz} = 0, \quad (7)$$

$$\mathrm{Ls} = pI_s\left[\int_0^M Dt\,\mathrm{d}t + DT(M-T)\right] = \frac{pI_sDT(M-T/2)}{2}. \quad (8)$$

2.1.2.1 $Q>X$

若$Q-X>0$，则由上述可得i产品年度总费用如下所示：

$$\mathrm{TC}_3 = \frac{(1-R)Qc + \mathrm{ORD} + c_1(Q-DT) + \frac{1}{2}hDT^2 - [pI_sDT(M-T/2)]/2}{T}. \quad (9)$$

2.1.2.2 $Q<X$

若$Q-X<0$，则由上述可得i产品年度总费用如下所示：

$$\mathrm{TC}_4 = \frac{(1-R)Qc + \mathrm{ORD} + k(DT-Q) + \frac{1}{2}hQ^2 - [pI_sDT(M-T/2)]/2}{T}. \quad (10)$$

综合延期支付情形下提供现金折扣政策中，现金折扣期限与采购期限以及采购量与需求量的比较，根据式（5）、式（6）、式（9）、式（10），供应-零售系统最佳订货策略可以转化为下面的优化求解问题：

$$\mathrm{TC}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{TC}_i,$$

$$\min \mathrm{TC}_i,$$

$$\mathrm{TC}_i=\begin{cases}\mathrm{TC}_1, M<N \text{ 且 } Q>X,\\ \mathrm{TC}_2, M<N \text{ 且 } Q<X,\\ \mathrm{TC}_3, M>N \text{ 且 } Q>X,\\ \mathrm{TC}_4, M>N \text{ 且 } Q<X.\end{cases}$$

2.2 库存模型求解

根据式（5），得到一阶条件为

$$\frac{\mathrm{d}_{\mathrm{TC}_1}}{\mathrm{d}_T}=-\frac{c(1-R)Q+\mathrm{ORD}+c_1Q}{T^2}+\frac{1}{2}hD+\frac{c(1-R)I_zD}{2}\left(1-\frac{M^2}{T^2}\right)+\frac{pI_sDM^2/2}{T^2}.$$

同理可求得其二阶表达式 $\frac{\mathrm{d}^2_{\mathrm{TC}_1}}{\mathrm{d}_T{}^2}=\frac{2c(1-R)Q+2\mathrm{ORD}+2c_1Q-pI_sDM^2+c(1-R)I_zDM^2}{T^3}$. 当 $\frac{\mathrm{d}^2_{\mathrm{TC}_{i1}}}{\mathrm{d}_{T_i}{}^2}>0$ 时，得当 $2c(1-R)Q+2\mathrm{ORD}+2c_1Q+c(1-R)I_zDM^2>pI_sDM^2$ 时，TC_1 取得极小值。由前提条件 $M<N$，且 $Q>X$，得 $2c(1-R)Q+2\mathrm{ORD}+2c_1Q>[pI_s-c(1-R)I_z]DM^2$. 令 $\frac{\mathrm{d}_{\mathrm{TC}_{i1}}}{\mathrm{d}_{T_i}}=0$，可得，当 $T_1^*=\sqrt{\frac{2c(1-R)Q+2\mathrm{ORD}+2c_1Q+c(1-R)I_zDM^2-pI_sDM^2}{hDT^2+cDI_z(1-R)}}$，$\mathrm{TC}_1$ 取得最小值。

同理可得，若 $2c(1-R)Q+2\mathrm{ORD}>[pI_s+2c(1-R)I_z]DM^2$，

$T_2^*=\sqrt{\frac{2c(1-R)Q+2\mathrm{ORD}-c(1-R)I_zDM^2-pI_sDM^2}{2kD+cDI_z(1-R)}}$，$\mathrm{TC}_2$ 取得最小值。

若 $(1-R)Qc+\mathrm{ORD}+c_1Q>0$，$T_3^*=\sqrt{\frac{4c(1-R)Q+4\mathrm{ORD}+4c_1Q}{2hD+pI_sD}}$，$\mathrm{TC}_3$ 取得最小值。

若 $c(1-R)Q+\mathrm{ORD}+kQ>\frac{1}{2}hQ^2$，$T_4^*=\sqrt{\frac{4c(1-R)Q+4\mathrm{ORD}+4kQ-2hQ^2}{pI_sD}}$，$\mathrm{TC}_4$ 取得最小值。

同上所述，其余各种产品的（T_i，Q_i）策略可以相继求出。从而根据不同（T_i，Q_i）策略水平下零售商库存年度总成本 $\mathrm{TC}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的取值情况，选取最优库存控制策略。

3 结论

现实库存控制需要因地制宜，研究以零售商为对象，考虑了对其多产品在允许缺货情况下的库存最优控制，并将其放在供应商提供延期付款以及现金折扣的前提下进行考虑。分别探讨 4 种情况，有效地得出了库存控制策略 T_i，Q_i 的计算模型及结果。可为现实采购提供有效指导，利于降低库存成本，提高企业利润及行业竞争力。这里积极考虑了影响库存的多种因素，具有一定的现实意义及操作价值。同时，在所建模型基础上，还可以进一步研究，比如考虑同一产品的不等采购周期、产品存在变质情况、模糊需求等等，使得模型更加贴近现实。与此同时，其模型的优化求解难度也将随之加大。

[参考文献] (References)

[1] 王爽心，姜妍，刘雅轩. 考虑变质策略的库存系统的动态建模与仿真[J]. 系统仿真学报，2006，18（11）：3267-3270，3275.

WANG S X，JIANG Y，LIU Y X. Dynamic modeling and simulation of inventory system considering metamorphism strategy[J]. Journal of System Simulation，2006，18(11)：3267-3270，3275.（in Chinese）

[2] 胡幼华，潘荫荣，房爱莲. 享有批量折扣的库存系统的动态仿真模型[J]. 计算机应用，2003，23 (2)：26-27，31.
HU Y H，PAN Y R，FANG A L. Dynamic simulation model of inventory system with discount of batch[J]. Computer Applications，2003，23(2)：26-27，31. (in Chinese)

[3] 胡幼华，潘荫荣. 有限期延迟交货的随机性库存系统的仿真模型[J]. 计算机应用与软件，2004，21 (7)：35-36，86.
HU Y H，PAN Y R. A simulation models of a stochastic inventory system with time-limited back-orders[J]. Computer Applications and Software，2004，21(7)：35-36，86. (in Chinese)

[4] GOYAL S K. Economic order quantity under conditions of permissible delay in payments[J]. Journal of the Operational Research Society，1985，36(4)：335-338.

[5] JAMAL A M M，SARKER B R，WANG S. An ordering policy for deteriorating items with allowable shortage and permissible delay in payment[J]. The Journal of the Operational Research Society，1997，48(8)：826-833.

[6] SARKER B R，JAMAL A M M，WANG S J. Optimal payment time under permissible delay in payment for products with deterioration[J]. Production Planning & Control，2000，11(4)：380-390.

[7] HUANG Y F. A note on EOQ model under cash discount and payment delay[J]. Information and Management Sciences，2005，16(3)：97-107.

[8] 于美娜，毛海军，杭文. 基于系统动力学的变质商品库存系统仿真[J]. 物流技术，2009，28 (11)：103-105，108.
YU M N，MAO H J，HANG W. Simulation of deteriorating items inventory system based on systems dynamics[J]. Logistics Technology，2009，28(11)：103-105，108. (in Chinese)

[9] 邱昊，梁樑，杨树. 供应商给定延期付款和现金折扣策略下的零售商最优库存策略[J]. 系统工程，2006，24 (9)：18-23.
QIU H，LIANG L，YANG S. Optimal retailer's ordering policy under permissible delay in payments and cash discount[J]. System Engineering，2006，24(9)：18-23. (in Chinese)