双剪应力多参数准则及其角隅模型

岳　娜，况联飞

（中国矿业大学力学与建筑工程学院，江苏徐州　221008）

摘要：以双剪应力准则与广义双剪应力准则为基础，进一步考虑岩土材料强度性质在偏平面和拉压子午线上不同于金属材料的变化规律，得出适用于描述岩土材料破坏规律的双剪应力多参数准则。同时为计算机处理塑性应变增量的方便，对双剪应力多参数准则进行角点修圆，得出了相应的角隅模型。

关键词：岩土工程；双剪应力；三参数准则；四参数准则；五参数准则；角隅模型

中图分类号：TU206　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1674-2850(2011)01-0120-9

Double shear stress multi-parameter criteria and its corner model

YUE Na，KUANG Lianfei

(*School of Mechanics and Civil Engineering，China University of Mining and Technology，Xuzhou，Jiangsu*　221008，*China*)

Abstract：This paper is based on double shear stress criterion and generalized double shear stress criterion，and further considered geotechnical material strength properties in partial plane and tension and compression on the different meridians of metal materials. It is concluded that the change rule of geotechnical materials suitable for describing the double shear destruction rule multi-parameter criteria. At the same time，in order to computer processing plastic strain increment of convenient，angular point repair round was applied to double shear stress multi-parameter criterion，and the corresponding corner model was obtained.

Key words：geotechnical engineering；double shear stress；three parameter criterion；four parameter criterion；five parameter criterion；corner model

0　引言

岩土材料在复杂应力状态下的变形和强度问题在岩土力学和各种工程应用中具有重要的理论和现实意义[1]，寻求一个符合试验结果、有一定物理概念、易被工程技术人员接受、便于计算机应用、并适用于全部应力状态的强度理论和相应的计算准则，已成为现代岩土工程计算中的一个重要任务。

岩土材料的屈服与破坏特征不同于金属材料，其在应力空间的破坏面的一般形式极其复杂，近年来大量进行的一些工程材料在复杂应力状态下的破坏性能试验，要求普遍形式的强度理论应具有以下特点[2~5]：

1）应满足 DRUCKER 提出的塑性屈服面的外凸性原理，即极限屈服面在 π 平面上的迹线为一外凸、光滑的非圆曲线；

2）在子午线上也为一外凸光滑曲线，随着压应力的提高，破坏面逐渐扩大；

3）具有强度差异（strength difference，S-D）效应，即拉压的屈服与破坏强度不同，同时双轴等压强度 σ_{bc} 也不等于单轴压缩强度 σ_c，即 $\sigma_c \neq \sigma_t \neq \sigma_{bc}$；

4）静水压力对屈服与破坏都有影响，且单纯的静水压力也可以使材料产生屈服。

综上可见，普遍形式的强度理论应包含多个材料强度参数。以俞茂宏等[6~15]提出的双剪应力屈服准则及广义双剪应力屈服准则为基础，为论述的系统性，先对双剪应力屈服准则（单参数准则）和广

作者简介：岳娜（1986—），女，硕士研究生，主要研究方向：市政工程. E-mail：yuena_03@163.com

义双剪应力准则（两参数准则）做一简要阐述。

1 双剪应力屈服准则和广义双剪应力准则

一点的应力状态存在3个主剪应力 τ_{13}，τ_{12}和 τ_{23}，最大剪应力准则的不足，实际上是没有考虑其他剪应力对材料屈服的影响。由于3个主剪应力中只有2个独立量，因此考虑2个较大主剪应力的作用，可得出双剪应力屈服准则：

$$f=\tau_{13}+\tau_{12}=\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)=c,\ \tau_{12}\geqslant\tau_{23};\tag{1}$$

$$f=\tau_{13}+\tau_{23}=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)-\sigma_3=c,\ \tau_{12}\leqslant\tau_{23}.\tag{2}$$

双剪应力屈服准则适用于拉压屈服极限相等的金属类材料，只需要材料的一个强度参数，因此也可称为双剪应力单参数准则。

同理，对Mohr-Coulomb准则进行修正，考虑2个主剪应力以及这2个应力作用面上的正应力的影响，可得出广义双剪应力准则：

$$F=\tau_{13}+\tau_{12}+\beta(\sigma_{13}+\sigma_{12})=c,\ F\geqslant F';\tag{3}$$

$$F'=\tau_{13}+\tau_{23}+\beta(\sigma_{13}+\sigma_{23})=c,\ F\leqslant F'.\tag{4}$$

经过推导，可得出一个与Mohr-Coulomb准则十分相似而又考虑了中间主应力 σ_2 影响的新的强度准则：

$$F=\sigma_1-\frac{\alpha}{2}(\sigma_2+\sigma_3)=\sigma_t,\tag{5}$$

$$F'=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)-\alpha\sigma_3=\sigma_c,\tag{6}$$

其中，α 为材料的拉压强度比，且 $\alpha=\sigma_t/\sigma_c$.

广义双剪应力强度准则需要材料的2个强度参数，也可称为双剪应力两参数准则。双剪应力两参数准则虽然考虑了中间主应力对材料破坏的影响，但仍然可得到单轴压缩强度与双轴压缩强度相等的结论。因此，它只适用于拉压强度不等而单轴压缩强度与双轴压缩强度相等的一类脆性材料，对于单轴压缩强度与双轴压缩强度不尽相等的岩土材料将会产生误差。为此，以下提出适用于岩土材料的双剪应力多参数准则。

2 双剪应力三参数准则及其角隅模型

2.1 双剪应力三参数准则

在双剪应力两参数准则的基础上，再考虑静水压力的影响，可以得出双剪应力三参数准则。其数学表达式如下：

$$F=\tau_{13}+\tau_{12}+\beta(\sigma_{13}+\sigma_{12})+a\sigma_{\mathrm{m}}=c,\ F\geqslant F';\tag{7}$$

$$F'=\tau_{13}+\tau_{23}+\beta(\sigma_{13}+\sigma_{23})+a\sigma_{\mathrm{m}}=c,\ F\leqslant F';\tag{8}$$

其中，τ_{13}为最大主剪应力；τ_{12}和 τ_{23}为其他2个主剪应力，大者为中间主剪应力，小者为最小主剪应力；σ_{m} 为静水压力；β 为反映十二面体正应力对破坏强度的影响参数；a 为静水压力对材料破坏的影响参数；c 为反映材料强度的参数。

三参数 β，a，c 的值可由材料的拉伸极限应力 σ_{t}、压缩极限应力 σ_{c} 和双轴压缩极限应力 σ_{bc}确定为

$$\begin{cases}\beta=\dfrac{\bar{\alpha}+2\alpha-3\alpha\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}(1+\alpha)},\\ a=\dfrac{6\alpha(\bar{\alpha}-1)}{\bar{\alpha}(1+\alpha)},\\ c=\dfrac{2\alpha}{1+\alpha}\sigma_c,\end{cases}\tag{9}$$

其中，$\alpha=\sigma_t/\sigma_c$；$\bar{\alpha}=\sigma_{bc}/\sigma_c$.

由于

$$\tau_{13}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2};\ \tau_{12}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2};\ \tau_{23}=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2};$$
$$\sigma_{13}=\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2};\ \sigma_{12}=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2};\ \sigma_{23}=\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}.\tag{10}$$

用主应力表示双剪应力三参数准则为

$$F=\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)+\beta\left[\sigma_1+\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right]+\frac{a}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=c,\ F\geqslant F';\tag{11}$$

$$F=-\sigma_3+\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)+\beta\left[\sigma_3+\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\right]+\frac{a}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=c,\ F\leqslant F'.\tag{12}$$

显然，当 $\bar{\alpha}=1$ 时，材料双轴压缩强度等于单轴压缩强度。当 $a=0$ 时，双剪应力三参数准则变为两参数准则。亦即，双剪应力两参数准则是双剪应力三参数准则的特例。两者在主应力空间中的极限面形状相似。双剪应力三参数准则在 p-q 子午面及偏平面上的图形如图 1 所示。

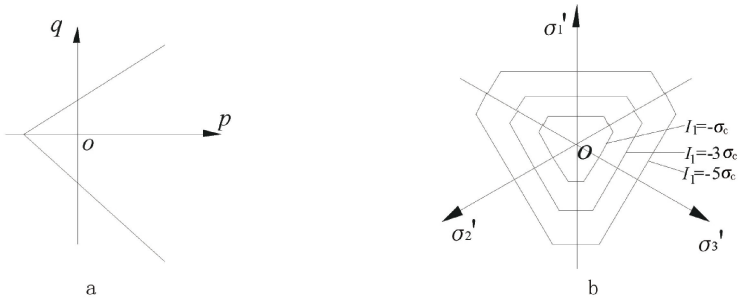


图 1 双剪应力三参数屈服准则

Fig. 1 Double shear stress three parameter yield criterion

a—子午面；b—偏平面

a-Meridian plane; b-Partial plane

双剪应力三参数准则的数学表达式较为简单，可以用于拉压强度不等、且单轴和双轴压缩强度亦不等的一类材料。在塑性变形分析中，为避免角点的奇异性而带来的计算机处理困难，可以将其角隅光滑化，从而得出一个新的便于计算机应用的光滑化双剪应力三参数准则。

2.2 双剪应力三参数准则角隅模型

双剪应力三参数准则在偏平面上与静水压力轴组成的（ξ，r，θ）柱面坐标系下的方程为

$$F(\xi,r,\theta)=r-\frac{\sqrt{6}c}{(3+\beta)\cos\theta}\left[1-\frac{(\alpha+2\beta)}{\sqrt{3}c}\xi\right]=0,\ 0^\circ\leqslant\theta\leqslant\arctan\frac{\sqrt{3}(1+\beta)}{3-\beta};\tag{13}$$

$$F'(\xi,r,\theta)=r-\frac{\sqrt{6}c}{(3-\beta)\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}\left[1-\frac{(\alpha+2\beta)}{\sqrt{3}c}\xi\right]=0,\ \arctan\frac{\sqrt{3}(1+\beta)}{3-\beta}\leqslant\theta\leqslant60^\circ;\tag{14}$$

其中，ξ为应力空间中的点在静水压力轴上的投影；(r,θ)为偏平面上的极坐标。

式（13）在π平面上$0°\leqslant\theta\leqslant60°$范围内图形是由2条直线组成的折线（如图2中折线$abc$）。式（13）、式（14）中方括号前的表达式显然反映了π平面上的变化规律，如以$f(\theta)$表示π平面上的矢径，则

$$f(\theta)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{6}c}{(3+\beta)\cos\theta}, & 0°\leqslant\theta\leqslant\arctan\dfrac{\sqrt{3}(1+\beta)}{3-\beta};\\ \dfrac{\sqrt{6}c}{(3-\beta)\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)}, & \arctan\dfrac{\sqrt{3}(1+\beta)}{3-\beta}\leqslant\theta\leqslant60°.\end{cases}\tag{15}$$

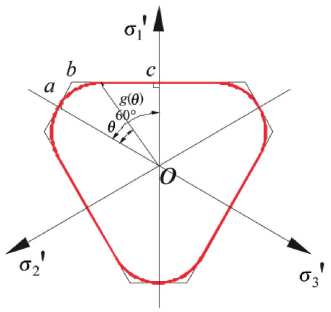


图2 双剪应力三参数准则角隅模型
Fig. 2 Corner model of double shear stress three parameter criterion

显然，只要将式（15）中的两式用一条光滑外凸曲线方程拟合，就能达到π平面上图形光滑化的目的。设π平面上这样的曲线方程为$g=g(\theta)$，则由双剪应力准则屈服面的边值条件以及对称性、外凸性，可知方程应满足以下3个条件：

1) $g(0°)=r_t$；$g(60°)=r_c$；

2) 当$\theta=0°$和$60°$时，$\mathrm{d}g(\theta)/\mathrm{d}\theta=0$；

3) $\dfrac{1}{g(\theta)}+\left[\dfrac{1}{g(\theta)}\right]''\geqslant0$，其中，$r_t$，$r_c$分别由式(15)求得，即$r_t=f(0°)$，$r_c=f(60°)$.

直接求解$g(\theta)$是很困难的，但如下椭圆方程可以满足以上3个条件，其表达式为

$$g(\theta)=\frac{2r_c(r_c^2-r_t^2)\cos\theta+r_c(2r_t-r_c)\left[4(r_c^2-r_t^2)\cos^2\theta+5r_t^2-4r_tr_c\right]^{1/2}}{4(r_c^2-r_t^2)\cos^2\theta+(r_c-2r_t)^2}.\tag{16}$$

那么，式（13）、式（14）两式的双剪应力三参数准则可用式（17）代替：

$$G(\xi,r,\theta)=r-g(\theta)\left[1-\frac{(\alpha+2\beta)}{\sqrt{3}c}\xi\right]=0,\ 0°\leqslant\theta\leqslant60°.\tag{17}$$

进一步整理可得双剪应力三参数准则角隅模型为

$$G(\xi,r,\theta)=\frac{\tau_m}{\sigma_c}-r(\theta)\left[1-\frac{1}{\rho}\frac{\sigma_m}{\sigma_c}\right]=0,\ 0°\leqslant\theta\leqslant60°,\tag{18}$$

其中，$\tau_m=r/\sqrt{5}$；$\sigma_m=\xi/\sqrt{3}$；

$$r(\theta)=\frac{2r_c(r_c^2-r_t^2)\cos\theta+r_c(2r_t-r_c)\left[4(r_c^2-r_t^2)\cos^2\theta+5r_t^2-4r_tr_c\right]^{1/2}}{4(r_c^2-r_t^2)\cos^2\theta+(r_t-2r_c)^2};$$

$$\rho=\frac{\bar{\alpha}\alpha}{\bar{\alpha}-\alpha};\ r_t=\left(\frac{6}{5}\right)^{1/2}\frac{\bar{\alpha}\alpha}{2\bar{\alpha}+\alpha};\ r_c=\left(\frac{6}{5}\right)^{1/2}\frac{\bar{\alpha}\alpha}{3\bar{\alpha}\alpha+\bar{\alpha}-\alpha}.$$

3 双剪应力五参数准则及其角隅模型

3.1 双剪应力五参数准则

在双剪应力三参数准则的基础上，分别考虑在拉伸子午线和压缩子午线的不同静水应力函数$h_1(\sigma_m)=A_1\sigma_m+B_1\sigma_m^2$，$h_2(\sigma_m)=A_2\sigma_m+B_2\sigma_m^2$的影响，可推得适用于全部应力范围的五参数强度准则，其表达式为

$$F=\tau_{13}+\tau_{12}+\beta(\sigma_{13}+\sigma_{12})+A_1\sigma_{\mathrm{m}}+B_1\sigma_{\mathrm{m}}^2=c,\ F\geqslant F';\tag{19}$$

$$F'=\tau_{13}+\tau_{23}+\beta(\sigma_{13}+\sigma_{23})+A_2\sigma_{\mathrm{m}}+B_2\sigma_{\mathrm{m}}^2=c,\ F\leqslant F'.\tag{20}$$

用主应力表示为

$$F=\sigma_1-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}+\frac{\beta}{2}\sigma_1+\left(A_1+\frac{3\beta}{2}\right)\sigma_{\mathrm{m}}+B_1\sigma_{\mathrm{m}}^2=c,\ F\geqslant F';\tag{21}$$

$$F'=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}-\sigma_3+\frac{\beta}{2}\sigma_3+\left(A_2+\frac{3\beta}{2}\right)\sigma_{\mathrm{m}}+B_2\sigma_{\mathrm{m}}^2=c,\ F\leqslant F';\tag{22}$$

其中，β，A_1，A_2，B_1，B_2，c 均可由试验确定，其中，β 已由广义双剪应力准则求得，与材料拉压强度比 α 的关系为 $\beta=(1-\alpha)/(1+\alpha)$.

同样，式（19）、式（20）亦可用坐标 (ξ, r, θ) 表示为

$$r=\frac{\sqrt{6}c}{(3+\beta)\cos\theta}\left[1-\frac{(A_1+2\beta)}{\sqrt{3}c}\xi+\frac{B_1}{3}\xi^2\right],\quad 0^\circ\leqslant\theta\leqslant\nu;\tag{23}$$

$$r=\frac{\sqrt{6}c}{(3-\beta)\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}\left[1-\frac{(A_2+2\beta)}{\sqrt{3}c}\xi+\frac{B_2}{3}\xi^2\right],\quad \nu\leqslant\theta\leqslant 60^\circ,\tag{24}$$

其中，ξ 为应力空间中的点在静水压力轴上的投影；(r, θ) 为偏平面上的极坐标。

易得

$$\begin{cases}\xi=\dfrac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{\sqrt{3}\sigma_{\mathrm{c}}},\\ r=\dfrac{\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}}{\sqrt{3}\sigma_{\mathrm{c}}},\\ \cos\theta=\dfrac{2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3}{\sqrt{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}}.\end{cases}\tag{25}$$

角度 ν 由式（23）、式（24）两式中，令 ξ=0，再使两式相等，求得

$$\nu=\arctan\frac{\sqrt{3}(1+\beta)}{3-\beta}.\tag{26}$$

它反映了偏平面上极限迹线的角点位置。在式（23）、式（24）两式中分别代入 θ=0°和 θ=60°，并合并常数，得到拉压子午线方程为

$$r_{\mathrm{t}}=a_0+a_1\xi+a_2\xi^2,\quad \theta=0^\circ;\tag{27}$$

$$r_{\mathrm{c}}=b_0+b_1\xi+b_2\xi^2,\quad \theta=60^\circ;\tag{28}$$

其中，

$$\begin{cases}a_0=\dfrac{\sqrt{6}c}{3+\beta};\ a_1=-\dfrac{\sqrt{2}(A_1+2\beta)}{3+\beta};\ a_2=\dfrac{\sqrt{2}B_1c}{\sqrt{3}(3+\beta)},\\ b_0=\dfrac{\sqrt{6}c}{3-\beta};\ b_1=-\dfrac{\sqrt{2}(A_2+2\beta)}{3-\beta};\ b_2=\dfrac{\sqrt{2}B_2c}{\sqrt{3}(3-\beta)}.\end{cases}\tag{29}$$

由于规定了这两子午线与静水压力轴交于相同的点 $\rho=\xi$. 因此，确定式（27）、式（28）中的系数 a_0，a_1，a_2，b_0，b_1，b_2 只需 5 个试验点：

1）单轴压缩强度 $\sigma_{\mathrm{c}}(\theta=60^\circ, \sigma_{\mathrm{c}}>0)$；

2) 单轴拉伸强度 $\sigma_t(\theta=0°)$；

3) 双轴压缩强度 $\sigma_{bc}(\theta=0°,\ \sigma_{bc}>0)$；

4) 拉子午线上的高静水应力点 $(\sigma_m/\sigma_c,\ \tau_m/\sigma_c)=(-\bar{\xi}_1,\ \bar{r}_1)(\theta=0°,\ \bar{\xi}_1>0)$；

5) 压子午线上的高静水应力点 $(\sigma_m/\sigma_c,\ \tau_m/\sigma_c)=(-\bar{\xi}_2,\ \bar{r}_2)(\theta=60°,\ \bar{\xi}_2>0)$.

将上述 5 个试验点代入式（27）、式（28），可得

$$\begin{aligned}
a_2&=\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{\xi}_1(\alpha-\bar{\alpha})-\sqrt{\frac{2}{3}}\alpha\bar{\alpha}+\sqrt{\frac{5}{3}}\bar{r}_1(2\bar{r}\alpha+\alpha)}{(2\bar{\alpha}+\alpha)\bar{\xi}_1^2-\frac{2}{3}\bar{\alpha}\bar{\xi}_1+\frac{1}{3}\alpha\bar{\xi}_1-\frac{2}{9}\alpha\bar{\alpha}},\\
a_1&=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}(2\bar{\alpha}-\alpha)a_2+\frac{\sqrt{2}(\alpha-\bar{\alpha})}{2\bar{\alpha}+\alpha},\\
a_0&=\frac{2\sqrt{5}}{3}\bar{\alpha}a_1-\frac{4\sqrt{5}}{9}\bar{\alpha}^2a_2+\sqrt{\frac{3}{2}}\bar{\alpha}.
\end{aligned}\tag{30}$$

令

$$\rho=\frac{-a_1-\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_2};\ \alpha=\frac{\sigma_t}{\sigma_c};\ \bar{\alpha}=\frac{\sigma_{bc}}{\sigma_c},\tag{31}$$

$$\begin{aligned}
b_2&=\frac{\bar{r}_2(\rho+1/3)-\sqrt{2/15}(\rho+\bar{\xi}_2)}{(\rho+\bar{\xi}_2)(\bar{\xi}_2-1/3)(\rho+1/3)},\\
b_1&=\frac{\bar{\xi}_2+1/3}{b_2}+\frac{\sqrt{6/5}-3\bar{r}_2}{3\bar{\xi}_2-1},\\
b_0&=-\rho b_1-\rho^2b_2.
\end{aligned}\tag{32}$$

则式（23）、式（24）可表示为

$$r=\begin{cases}r_t/\cos\theta, & 0°\leqslant\theta\leqslant\nu;\\ r_c/\cos(\theta-\frac{\pi}{3}), & \nu\leqslant\theta\leqslant60°;\end{cases}\tag{33}$$

其中，r_t，r_c 分别由式（27）、式（28）决定；ν 由式（26）决定。

式（23）可称为双剪应力五参数准则。它的拉压子午线为抛物线；偏平面上的图形在低静水压力（$\xi\to0$）范围内接近三角形，随着静水压力的升高，向正六边形过渡，当静水压力足够高时（$\xi\to\infty$），图形变为正六边形，如图 3 所示。与双剪应力三参数准则相比，三参数准则在偏平面上的极限迹线在不同静水压力值时的形状均相同，只是大小变化，如图 4b 所示；而双剪五参数准则形状和大小均发生了变化，因此可以适应更广泛应力状态，拉压子午线也由直线变为曲线，如图 4 所示。

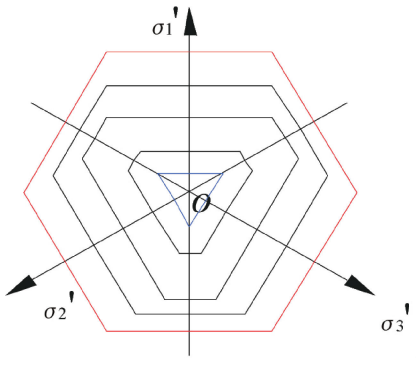


图 3 双剪应力五参数准则

Fig. 3 Double shear stress five parameter criterion

双剪应力五参数准则可以适应更为普遍的情况，当 $a_2=b_2=0$ 时，它即为双剪应力三参数准则；当 $a_2=b_2=a_1=b_1=0$ 时，它即为广义双剪应力准则或双剪应力两参数准则；当 $\beta=a_2=b_2=a_1=b_1=0$ 时，它即为双剪应力屈服准则或双剪应力单参数准则。

3.2 双剪应力五参数准则角隅模型

双剪应力五参数准则在偏平面上的迹线为一直线六边形。由于对称性，仅考虑 0°≤θ≤60°范围内的图形，为带角点的折线。角点的存在给计算机处理带来了不便。为此设法用一条光滑、外凸的曲线来拟合这一折线，这样对称延拓到整个偏平面，就可得到一三瓣光滑、外凸的曲线。与求解三参数角隅模型一样，根据其边值条件以及对称性、外凸性要求，得出如下双曲线方程满足要求，其表达式为

$$r(\theta)=\frac{2(1-K^2)+(K-2)\sqrt{4(K^2-1)+(5-4K)\sec^2\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}}{4(1-K^2)-(K-2)^2\sec^2\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}r_t\sec\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right),\ 0°\leqslant\theta\leqslant 60°,\quad(34)$$

其中，$K=r_t/r_c$.

式（33）可用式（34）近似代替，称式（34）为双剪应力五参数准则角隅模型。两者具有相同的拉压子午线，仅在偏平面上的迹线稍有不同，但非常接近，前者为直线组成的六边形，后者为三瓣光滑外凸曲线。双剪应力五参数准则在偏平面上的迹线以及拉伸和压缩子午线如图 4 所示。

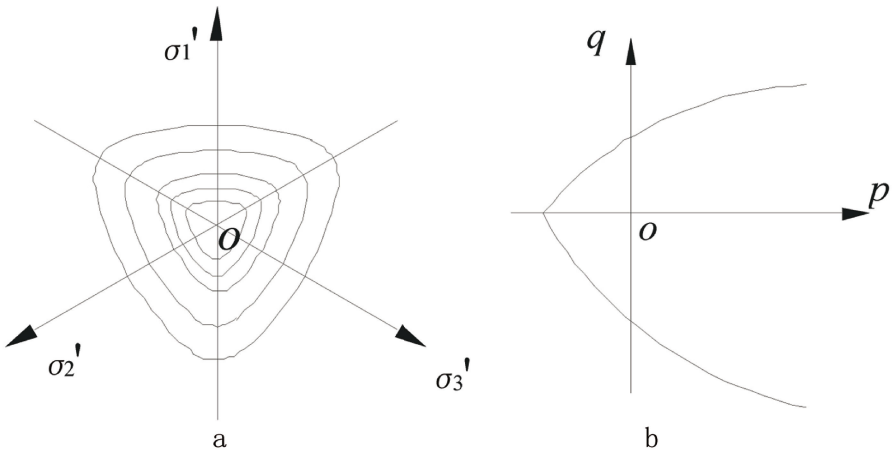


图 4 双剪应力五参数准则角隅模型

Fig. 4 Corner model of double shear stress five parameters criterion

a—偏平面；b—子午面

a-Partial plane; b-Meridian plane

4 双剪应力四参数准则

确定式 29 中的系数 a_0，a_1，a_2，b_0，b_1，b_2 时采用如下 5 个试验点：

1) $\sigma_1=\sigma_t$，$\sigma_2=\sigma_3=0$；

2) $\sigma_1=\sigma_2=0$，$\sigma_3=-\sigma_c$；

3) $\sigma_1=0$，$\sigma_2=\sigma_3=-\sigma_{bc}$；

4) $\sigma_m/\sigma_c=-\bar{\xi}$，$\tau_m/\sigma_c=\bar{r}$；

5) $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_m^0$，并设 $\sigma_m^0=\sigma_t$.

前 4 个为试验点，第 4 个为 Mohr-Coulomb 准则确定的三向等拉点。由于三向等拉试验很难实现，可设三向等拉点等于 σ_t，这样得到的 6 个系数表达式较前五参数准则更为简单，试验也比较容易，避免了拉压子午线上高静水压力破坏点的三轴试验。各系数的表达式为

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{2\sqrt{2/15}\bar{\alpha}+\sqrt{3/10}\alpha}{(4/9)(2\alpha+\bar{\alpha})\bar{\alpha}+(1/3)\alpha^2}, \\ a_1 = \sqrt{3/10}-(4/3)\alpha a_2, \\ a_0 = 2\sqrt{2/15}-(4/9)(2\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}^2)a; \end{cases} \tag{34}$$

$$\begin{cases} b_2 = \dfrac{2\sqrt{6/5}\xi/(1+3\alpha)-r}{(1/3)\xi-\xi^2+(1/3)\alpha}, \\ b_1 = (1/3-\alpha)b_2-\sqrt{6/5}/(1+3\alpha), \\ b_0 = \bar{r}-\sqrt{6/5}\xi/(1+3\alpha)+\xi(1/3-\alpha-\xi)b_2. \end{cases} \tag{35}$$

虽然这时理论上采用了 5 个试验点，但实际上只有 4 个，所以也可称为双剪应力四参数准则。

5 结论

双剪应力屈服准则较 Mohr-Coulomb 准则等单一剪应力准则进一步考虑了 2 个较大主剪应力对材料屈服的影响。双剪应力屈服准则只需要一个材料强度参数，也称为双剪应力单参数准则，但它只适用于拉压强度相等的金属材料。

广义双剪应力屈服准则进一步考虑了 2 个主剪应力作用面上的正应力对屈服与破坏的影响，称为双剪应力两参数准则。广义双剪应力屈服准则考虑了岩土材料的 S-D 效应，但仍然可以得到单轴压缩强度与双轴压缩强度相等的结论，因此，它只适用于拉压强度不等而单轴压缩强度与双轴压缩强度相等的一类材料。

为进一步考虑静水压力 σ_m 对材料屈服或破坏的影响，提出了双剪应力三参数准则，它适用于拉压强度不等且单轴压缩强度与双轴压缩强度不相等的岩土和混凝土材料。为计算机处理上的方便，提出了其对应的角隅模型。

在双剪应力三参数准则的基础上，考虑岩土材料拉压子午线及偏平面上的极限迹线均应为一光滑、外凸曲线的事实，进一步导出了双剪应力四参数及五参数准则及其角隅模型。双剪应力五参数准则角隅模型在偏平面上为一封闭的光滑外凸曲线，其拉压子午线为抛物线，适用于全部应力状态，其他双剪应力准则可以作为其特例。

虽然上述双剪应力屈服准则极大可能地去完美刻画岩土材料的屈服性状，但毕竟材料性状是客观的，而屈服条件是主观的。双剪应力五参数准则能够更为完整描述岩土材料的屈服性状，但它同样没有考虑岩土材料在单纯静水压力作用下可以产生屈服的这一事实。基于此，俞茂宏[15]又对双剪应力屈服准则进行了修正与改进，提出了广义双剪应力椭圆帽子屈服面模型，从而可以考虑单纯静水压力作用下材料产生屈服的事实。这则为考虑单纯静水压力可以产生屈服事实的其中一种方法，即在原有屈服准则的基础上外加一帽子模型，类似的还有 ROSCOE 提出的剑桥模型。另外一种考虑方法为采用多重屈服面的方法，如 1977 年 LADE 提出的 2 个屈服面的 Lade 双屈服面屈服准则[16]。

综上可见，塑性屈服理论仍处于不断向前发展与进一步成熟的阶段。

[参考文献] (References)

[1] 陈惠发，萨里普 A F，余天庆. 土木工程材料的本构方程[M]. 王勋文. 武汉：华中科技大学出版社，2000.
CHEN H F, SAREP A F, YU T Q. Civil engineering material constitutive equations[M]. WANG X W. Wuhai: Huazhong University of Science and Technology Press, 2000. (in Chinese)

[2] 张学言. 岩土塑性力学[M]. 北京：人民交通出版社，1993.
ZHANG X Y. Geotechnical plastic mechanics[M]. Beijing: China Communications Press, 1993. (in Chinese)

[3] 龚晓南. 土塑性力学（2 版)[M]. 杭州：浙江大学出版社，1999.

GONG X N. Soil plastic mechanics (2nd Editon)[M]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 1999. (in Chinese)

[4] 郑颖人，龚晓南. 岩土塑性力学基础[M]. 北京：中国建筑工业出版社，1989.
ZHENG Y R, GONG X N. Geotechnical plastic mechanics foundation[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 1989. (in Chinese)

[5] 郑颖人，沈珠江，龚晓南. 岩土塑性力学原理[M]. 北京：中国建筑工业出版社，2002.
ZHENG Y R, SHEN Z J, GONG X N. Geotechnical plastic mechanics principle[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2002. (in Chinese)

[6] YU M H. Generalized plasticity[M]. Berlin: Springer, 2006.

[7] 俞茂宏. 各向同性宏观强度理论研究[J]. 西安交通大学学报，1979 (3)：113-118.
YU M H. Isotropic macroscopic strength theory research[J]. Academic Journal of Xi'an Jiaotong University, 1979(3): 113-118. (in Chinese)

[8] 俞茂宏，宋凌宇，陈萍. 双剪应力准则的一个推广[J]. 西安交通大学学报，1983，3 (17)：65-68.
YU M H, SONG L Y, CHEN P. Double shear stress criterion of a promotion[J]. Academic Journal of Xi'an Jiaotong University, 1983, 3(17): 65-68. (in Chinese)

[9] 俞茂宏，何丽南，宋凌宇. 双剪应力强度理论及其推广[J]. 中国科学 (A 辑)，1985 (12)：1113-1120.
YU M H, HE L N, SONG L Y. Double shear theory and its promotion[J]. China Science, 1985(12): 1113-1120. (in Chinese)

[10] 俞茂宏，刘凤羽. 双剪应力三参数准则及其角隅模型[J]. 土木工程学报，1988，21 (3)：71-75.
YU M H, LIU F Y. Double shear stress three parameters rules and pectin model[J]. China Civil Engineering Journal, 1988, 21(3): 71-75. (in Chinese)

[11] 俞茂宏，刘凤羽. 双剪应力四参数和五参数准则[J]. 西安交通大学学报，1989，23 (2)：9-15.
YU M H, LIU F Y. Double shear stress four parameters and five parameters criteria[J]. Academic Journal of Xi'an Jiaotong University, 1989, 23(2): 9-15. (in Chinese)

[12] 俞茂宏，刘凤羽，刘锋，等. 一个新的普遍形式的强度理论[J]. 土木工程学报，1990，23 (1)：34-40.
YU M H, LIU F Y, LIU F, et al. A new universal form of strength theory[J]. Civil Engineering Journal, 1990, 23(1): 34-40. (in Chinese)

[13] 俞茂宏. 强度理论百年总结[J]. 力学进展，2004，4 (34)：529-560.
YU M H. Strength theory centenary summary[J]. Mechanical Progress, 2004, 4(34): 529-560. (in Chinese)

[14] 俞茂宏，YOSHIMINE M，强洪夫，等. 强度理论的发展和展望[J]. 工程力学，2004，6 (21)：1-20.
YU M H, YOSHIMINE M, QIANG H F, et al. Strength theory development and the forecast[J]. Engineering Mechanics, 2004, 6(21): 1-20. (in Chinese)

[15] 俞茂宏，刘继明，YOSHIYA O D A，等. 论岩土材料屈服准则的基本特性和创新[J]. 岩石力学与工程学报，2007，9 (26)：1745-1757.
YU M H, LIU J M, YOSHIYA O D A, et al. Concerning the geotechnical material yield criterion of basic characteristics and innovation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 9(26): 1745-1757. (in Chinese)

[16] 杨雪强，李彰明，史宏彦. Lade 体积屈服面模型的合理修正[J]. 工程力学，2009 (11)：1-20
YANG X Q, LI Z M, SHI H Y. Lade volume yield surface model reasonable correction[J]. Engineering Mechanics, 2009(11): 1-20. (in Chinese)