TORA 系统分层滑模控制方法研究

包宇庆，谢吉华，高丙团

（东南大学电气工程学院，南京 210018）

摘要：针对欠驱动具有旋转激励的平移振荡器（translational oscillator with rotational actuator，TORA），设计了2种分层滑模控制器。首先，将TORA系统2个运动自由度中每一个运动自由度的2个状态变量看成一个子系统，分别构造子滑模面；然后，将系统的总滑模面写成2个子滑模面函数的形式。2种分层滑模控制方法中，第1种方法是将总滑模面写成2个子滑模面的分段线性函数的形式，以保证各子滑模面的稳定；第2种方法的总滑模面为各子滑模面的连续线性函数，连续线性函数系数的符号须对系统模型进行具体分析获得。仿真实验分别验证了2种控制方法的有效性，且实验结果表明第2种控制方法效果更好。

关键词：机器人控制；欠驱动；旋转激励的平移振荡器；滑模控制

中图分类号：TP273　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1674-2850(2011)11-2035-6

Research on hierarchical sliding mode control method of TORA system

BAO Yuqing，XIE Jihua，GAO Bingtuan

(*Electrical Engineering School*，*Southeast University*，*Nanjing* 210018，*China*)

Abstract：Two different hierarchical sliding mode controllers are designed for an underactuated translational oscillator with rotational actuator (TORA) system. Firstly, the TORA system is separated into two subsystems according to the degrees of freedom. Each subsystem contains two state variables, which are chosen to construct a sub-sliding surface. And the total sliding surface is defined as a function of the two sub-sliding surfaces. For the two methods of hierarchical sliding mode control, the first method is to define the total sliding surface as a piecewise linear function of the two sub-sliding surfaces. With this method, the stability of each sub-system can be guaranteed theoretically. The second method is to define the total sliding surface as a continuous linear function of the two sub-sliding surfaces. However, the coefficient sign of the continuous linear function should be determined by analyzing the model. Finally, simulation results demonstrate the feasibility of the two controllers. Moreover, simulation results of the controlled system with the second method have better performance than those with the first method.

Key words：robot control; underactuated; translational oscillator with rotational actuator; sliding mode control

0 引言

TORA系统是欠驱动基准系统之一，该系统由一个未驱动的平移振荡器和安装在其上的驱动转动小球组成，通常用来检验低阶非线性动力学系统的控制设计[1]。

针对TORA系统，学者们提出了许多非线性控制策略。WAN等[2]通过部分反馈线性化和Backstepping设计的方法得到TORA系统的全局渐近稳定控制。JANKOVIC等[3]针对TORA系统提

基金项目：高等学校博士学科点专项科研基金（新教师基金）(20100092120045)；国家自然科学基金（11102039）；东南大学基本科研业务费（3216001502）

作者简介：包宇庆（1987—），男，硕士研究生，主要研究方向：欠驱动系统、电力系统信息

通信联系人：高丙团，副教授，主要研究方向：欠驱动机械系统、仿生机器人的建模与控制、智能电网等.

E-mail：gaobingtuan@seu.edu.cn

出了一种基于系统无源特性的控制方法。国际期刊 International Journal of Robust and Nonlinear Control 对 TORA 系统的非线性控制问题进行过专门的研究报道[1,4]。其中，BUPP 等[1]对 TORA 控制系统进行了介绍，建立了数学模型，并分析了其非线性控制存在的问题。在此基础上，还建立了一个 TORA 系统的实验平台，以验证控制算法[4]。

滑模变结构控制是一种鲁棒性很好的控制算法，能够主动改变控制结构以获得理想输出。由于其具有对系统参数变化和对外来扰动不敏感的特性，因而在实际中得到了广泛的应用。然而，针对 TORA 这样的欠驱动系统，控制变量较多，在设计滑模控制器时需要采用更加复杂的设计。目前，针对 TORA 系统的滑模控制研究还不多，HUNG 等[5]采用自调节模糊滑模控制实现了 TORA 系统的解耦控制，并提出了一种解耦自调节符号距离模糊滑模控制器，同时采用解耦控制和模糊滑模控制实现控制器。与自调节模糊解耦滑模控制略有不同，这里采用的是分层滑模变结构控制方法。

采用 2 种不同的方法设计了分层滑模变结构控制器，对 TORA 系统进行控制设计，通过仿真实验对 2 种方法的控制效果进行了比较。

1 系统模型

TORA 系统的模型如图 1 所示，TORA 系统由左右移动的小车和在小车上做旋转运动的小球组成。其中，质量为 M 的小车通过倔强系数为 k 的弹簧连接于一固定物，相对于外部小车在 x 轴方向上做一维运动。质量为 m 的小球在输入转矩 u 的作用下相对于内部小车在一个垂直平面内转动，转动半径为 r，小球关于其质心的转动惯量为 I，小球旋转的角度记为 θ.

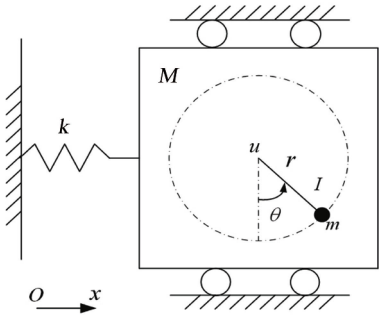


图 1 TORA 系统
Fig. 1 TORA system

文献[1]详细介绍了 TORA 系统的建模过程，通过拉格朗日方法对系统进行建模，经过整理，TORA 系统可以写成以下形式：

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2,\\ \dot{x}_2 = f_1(X)+b_1(X)u,\\ \dot{x}_3 = x_4,\\ \dot{x}_4 = f_2(X)+b_2(X)u,\end{cases} \tag{1}$$

其中，$x_1=x$ 为小车在 x 轴方向的位置；$x_2=\dot{x}$ 为小车在 x 轴方向的速度；$x_3=\theta$ 为小车上的小球相对于垂直方向的角度；$x_4=\dot{\theta}$ 为小车上的小球相对于垂直方向的角速度。

$$f_1(X)=\frac{(mr^2+I)(mr\sin\theta\dot{\theta}^2-kx)}{(M+m)(mr^2+I)-(mr\cos\theta)^2};\ f_2(X)=\frac{mr\cos\theta(kx-mr\sin\theta\dot{\theta}^2)}{(M+m)(mr^2+I)-(mr\cos\theta)^2};$$

$$b_1(X)=\frac{-mr\cos\theta}{(M+m)(mr^2+I)-(mr\cos\theta)^2};\ b_2(X)=\frac{(M_x+m)}{(M+m)(mr^2+I)-(mr\cos\theta)^2}.$$

2 分层滑模变结构控制方法

对于式（1）所描述的 TORA 系统状态方程的一般形式，在采用分层滑模变结构控制方法时，须先将上述系统分解为 2 个二阶非线性子系统，2 个二阶子系统分别由状态变量（x_1，x_2）和（x_3，x_4）构成。这 2 个子系统对应 2 个子滑模面，即

$$\begin{aligned}s_1 &= c_1x_1+c_2x_2,\\ s_2 &= c_3x_3+c_4x_4,\end{aligned} \tag{2}$$

其中，c_1，c_2，c_3，c_4 为正实数。为实现系统的所有状态变量都趋近于期望值，就需要设计新的滑模面和

新的控制输入。采用分层滑模变结构控制方法，首先需要设计一个总的滑模面，总的滑模面可以写为

$$s_{\text{total}} = H(s_1, s_2), \tag{3}$$

其中，s_{total}为一个关于 s_1，s_2 的函数，采用 Lyapunov 的方法设计一个控制输入，使 s_{total}渐近稳定，并使各状态变量收敛于期望值。

针对 $H(s_1, s_2)$ 采用不同的形式，可将分层滑模控制方法分成下列 2 种具体方法。

2.1 基于分段线性总滑模面的滑模控制方法

文献[6]～[8]介绍了一种分层滑模变结构控制方法。总滑模面采用一个关于各子滑模面的分段线性函数，通过采用合适的构造方法，只要总滑模面渐近稳定，就可以保证所有的子滑模面都渐近稳定。基于这样的思想，为 TORA 系统设计一种分层滑模控制器，使所有状态变量全局稳定。

系统总的滑模面定义为

$$s_{\text{total}} = \alpha s_1 + s_2, \tag{4}$$

其中，α 为与 s_1，s_2 有关的分段函数，其表达式可以写为

$$\alpha = \begin{cases} 1, & s_1 s_2 \geqslant 0, \\ -1, & s_1 s_2 < 0. \end{cases} \tag{5}$$

由 α 的表达式可以证明αs_1 和 s_2 是同符号数，于是有 $|\alpha s_1| \leqslant |s_{\text{total}}|$ 和 $|s_2| \leqslant |s_{\text{total}}|$，这样只需要设计控制输入，使总滑模面 s_{total}收敛于 0，就可以保证 s_1 和 s_2 都收敛于 0.

系统的总控制输入可通过 Lyapunov 的方法设计得到。首先，定义 s_{total}的 Lyapunov 能量函数 $V_{\text{total}} = \frac{1}{2} s_{\text{total}}^2$，$V_{\text{total}}$ 的导数可以写为

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\text{total}} = s\dot{s}_{\text{total}} &= s[c_4(f_2 + b_2 u) + c_3 x_4 + \alpha c_2(f_1 + b_1 u) + \alpha c_1 x_2] \\ &= s[c_4 f_2 + \alpha c_2 f_1 + c_3 x_4 + \alpha c_1 x_2 + (c_4 b_2 + \alpha c_2 b_1) u]. \end{aligned} \tag{6}$$

由 Lyapunov 稳定性第二法可知，如果 $\dot{V}_{\text{total}} < 0$，则滑模面 s_{total}将收敛于 0. 因此，控制输入 u 可以写为

$$u = -\frac{c_4 f_2 + \alpha c_2 f_1 + c_3 x_4 + \alpha c_1 x_2 + \eta \cdot \text{sign}(s_{\text{total}}) + k s_{\text{total}}}{c_4 b_2 + \alpha c_2 b_1}. \tag{7}$$

将 u 的表达式代入 Lyapunov 函数，于是有

$$V_{\text{total}} = -s[\eta \cdot \text{sign}(s) + ks] = -\eta |s| - k \cdot s^2 \leqslant 0. \tag{8}$$

从而使系统在 Lyapunov 意义下是稳定的。

由式（4）和式（5）可知，αs_1 和 s_2 是同符号数，于是有 $|\alpha s_1| \leqslant |s_{\text{total}}|$ 和 $|s_2| \leqslant |s_{\text{total}}|$，因此子滑模面 s_1 和 s_2 在 Lyapunov 意义下是也稳定的。

2.2 基于模型分析的分层滑模变结构控制方法

基于分段线性总滑模面的分层滑模控制方法虽然能保证系统所有滑模表面的稳定性，但其效果有时却并不十分理想。由于采用这种方法需要改变滑模面，就使得系统在控制过程中会发生剧烈抖振，这种抖振对于低阶系统的稳定性影响不大，对于高阶系统则会带来严重的影响，以至于无法使其达到稳定。

鉴于实际效果的考虑，借鉴 LO 等[9]的解耦滑模控制方法，提出了一种基于模型分析的分层滑模变结构控制方法。

系统的总滑模面可以写成如下形式：

$$s_{\text{total}} = \mu s_1 + s_2. \tag{9}$$

与式（4）不同的是，μ 为一个定值，而不是一个分段函数，其取值为 1 或者－1，μ 的取值须使滑模面 μs_1 和 s_2 具有相互抵消的趋势，须根据模型进行具体分析。

系统的控制输入可通过 Lyapunov 的方法设计得到，设计过程参照基于分段线性总滑模面的滑模控制方法，最终可解得系统的控制输入为

$$u = -\frac{c_4 f_2 + \mu c_2 f_1 + c_3 x_4 + \mu c_1 x_2 + \eta \cdot \text{sign}(s_{\text{total}}) + k s_{\text{total}}}{c_4 b_2 + \mu c_2 b_1}, \tag{10}$$

在控制输入 u 的作用下，可以使系统总滑模面 s_{total} 在 Lyapunov 意义下是稳定的。

3 仿真实验结果

将 2 种分层滑模控制方法分别应用于 TORA 系统，进而分析其性能。整个闭环控制系统用 Matlab 程序仿真实现。

TORA 系统的物理参数选择可参照文献[10]，取 M=1.360 8 kg，m=0.096 kg，k=186.3 N/m，r=0.059 2 m，I=0.000 217 5 kg·m^2. 控制器的参数选取为 c_1=80，c_2=15 000，c_3=500，c_4=100，η=1，k=10；初始条件为 $[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^{\text{T}} = [0.01 \quad 0 \quad \pi/6 \quad 0]^{\text{T}}$.

3.1 分段线性总滑模面滑模控制方法

采用基于分段线性总滑模面的滑模控制方法对 TORA 系统进行控制，仿真结果如图 2a 所示，各滑模面的输出曲线如图 2b 所示。

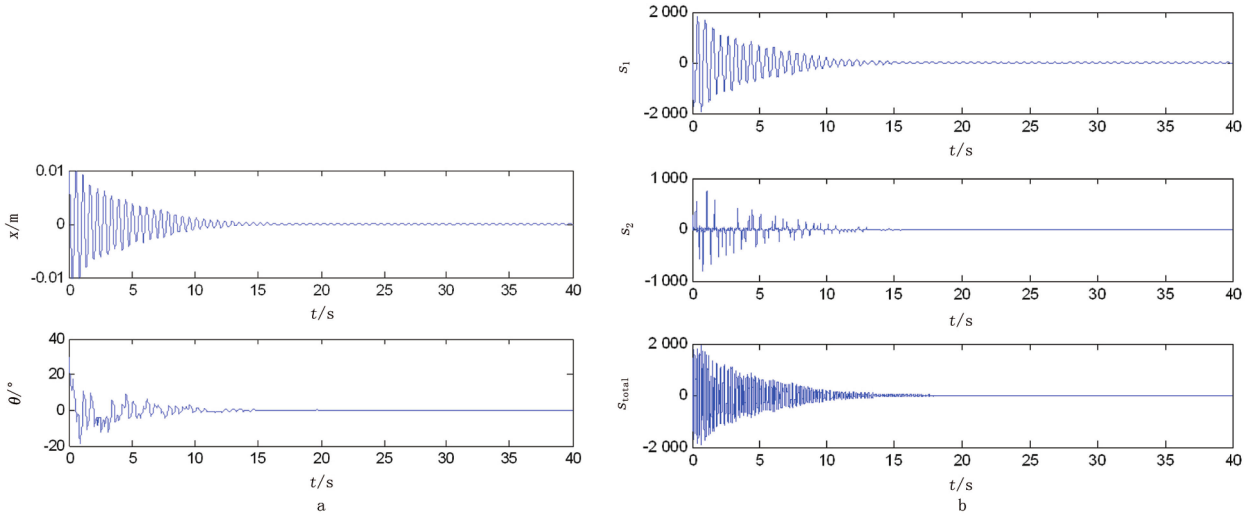


图 2 分段线性总滑模面的滑模控制仿真结果

Fig. 2 Simulation result of sliding mode control based on piecewise linear total sliding surface

a－TORA 系统各参数输出曲线；b－各滑模面的输出曲线

a-Each parameter of TORA system; b-Each sliding mode surface

由图 2a 可以看出：尽管经历了一定的震荡，小车的位置 x，以及小球的角度 θ 都能回复到平衡位置。调节时间约为 16 s（δ 取 2%）. 尽管前面已经从理论上证明了基于分段线性总滑模面的滑模控制器的稳定性，然而由图 2b 可以发现：基于分段线性总滑模面的滑模控制器的各滑模面都存在着剧烈抖振，这种抖振会对调节时间以及最终的稳定状态产生严重影响。

3.2 基于模型分析的分层滑模控制方法

针对式（1）所描述的 TORA 系统状态方程的一般形式以及式（9）所描述的滑模面，对系统的模型进行分析以确定 μ 的取值。

假设小车在平衡前的瞬间 $s_1>0$（小车位于 x 轴正半轴）。此时需要一个正向的力矩 u 驱动小球转动，并且此时须有 $s_2<0$（小球的转角小于零），才能使小车与小球组成的系统回归平衡位置（动量守恒原理，如果小球的转角 $\theta>0$，则小球的转角会在转矩 u 的作用下更加偏离平衡位置）。因此，有 $s_1>0$，$s_2<0$，须使 μ 的取值大于零，这样当 s_{total} 收敛于 0 时，s_1 与 s_2 的符号仍能满足 $s_1>0$，$s_2<0$，并逐渐收敛为 0. 因此在这里 μ 取为 1.

确定了 μ 的取值，可以按照上一节介绍的基于模型分析的分层滑模控制方法设计控制器，仿真结果如图 3a 所示，各滑模面的输出曲线如图 3b 所示。

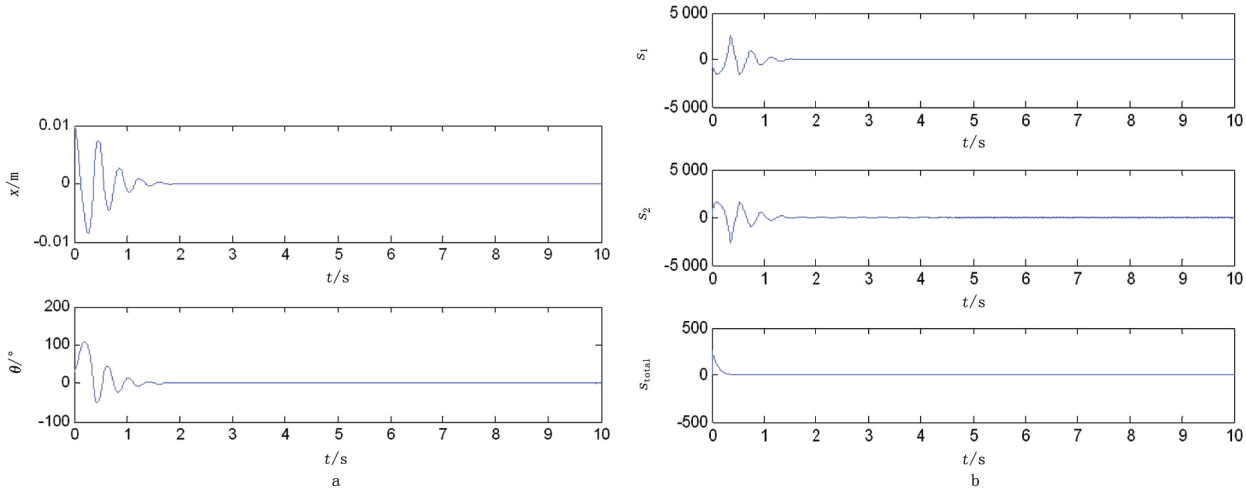


图 3 基于模型分析的滑模控制仿真结果

Fig. 3 Simulation result of sliding mode control based on model analysis

a—TORA 系统各参数输出曲线；b—各滑模面的输出曲线

a-Each parameter of TORA system; b-Each sliding mode surface

由图 3a 可以看出：小车的位置 x，以及小球的角度 θ 都能快速地恢复到平衡位置，调节时间仅为 1.5 s 左右（δ 取 2%）。相比于基于分段线性总滑模面的滑模控制方法，基于模型分析的分层滑模控制方法的滑模面更加平滑，收敛更快。

μ 取 −1 时的仿真结果如图 4 所示。可见：在基于模型分析的分层滑模控制方法中，对模型分析的过程必不可少，μ 的取值与实际模型的特点有关，须采用上面介绍的分析方法进行分析。如果 μ 的取值不正确，系统是不能收敛的。

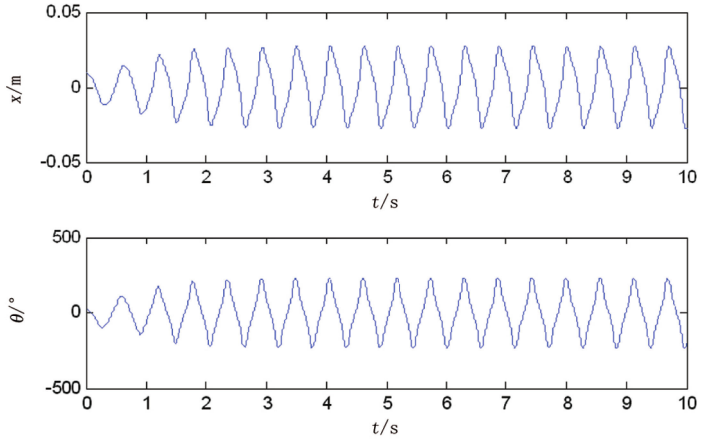


图 4 μ 取 −1 时基于模型分析的滑模控制仿真结果

Fig. 4 Simulation result of sliding mode control based on model analysis when $\mu=-1$

2种分层滑模控制方法应用于TORA系统的比较如表1所示。

表1 两种控制方法的比较

Tab. 1 Comparison between two control methods

	基于分段线性总滑模面的滑模控制方法	基于模型分析的分层滑模控制方法
稳定性证明	理论较为完善，能从理论上严格证明各滑模面的稳定性	定性分析子系统稳定性，严格理论证明为下一步工作
滑模面设计的繁琐程度	设计过程相对简单；滑模面的系数是分段函数，控制器的实现相对困难	设计过程需对模型进行分析；滑模面的系数是常数，控制器实现简单
控制效果	滑模面存在抖振，调节时间较长	滑模面无抖振，调节时间短

4 结论

研究了欠驱动TORA系统的2种分层滑模变结构控制方法，在设计过程中以及最终的控制效果上都有很大差异。采用基于分段线性总滑模面的滑模变结构控制方法快速简单，不需要对模型进行分析，并且能在理论上证明其稳定性，然而由于各滑模面存在抖振，因此调节时间较长，效果一般。基于模型分析的分层滑模变结构控制方法需要对模型进行具体分析，效果要优于基于分段线性总滑模面的滑模变结构控制方法，其理论有待进一步完善。

基于模型分析的分层滑模控制方法由于其非常好的控制效果，可以在实际中得到广泛的推广应用，未来工作将从理论上证明其在控制过程中各子滑模面的稳定性。

[参考文献] (References)

[1] BUPP R T, BERNSTEIN D S, COPPOLA V T. A benchmark problem for nonlinear control design[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 1998, 8(4): 307-310.

[2] WAN C J, BERNSTEIN D S, COPPOLA V T. Global stabilization of the oscillating eccentric rotor[A]. Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control[C]. Lake Buena Vista, FL, USA, 1994. 4024-4029.

[3] JANKOVIC M, FONTAINE D, KOKOTOVIC P V. TORA example: cascade-and passivity-based control designs[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 1996, 4(3): 292-297.

[4] BUPP R T, BERNSTEIN D S, COPPOLA V T. Experimental implementation of integrator backstepping and passive nonlinear controllers on the RTAC testbed[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 1998, 8(5): 435-457.

[5] HUNG L C, LIN H P, CHUNG H Y. Design of self-tuning fuzzy sliding mode control for TORA system[J]. Expert Systems and Application, 2007, 32(1): 201-212.

[6] YI J Q, WANG W, ZHAO D B, et al. Cascade sliding-mode controller for large-scale underactuated systems[A]. 2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2005 (IROS 2005)[C]. Edmonton: IEEE, 2005. 301-306.

[7] 王伟，易建强，赵冬斌，等. Pendubot的一种分层滑模控制方法[J]. 控制理论与应用，2005，22 (3)：417-422.
WANG W, YI J Q, ZHAO D B, et al. Hierarchical sliding-mode control of pendubot[J]. Control Theory & Applications, 2005, 22(3): 417-422. (in Chinese)

[8] HAO Y X, YI J Q, ZHAO D B, et al. Robust control using incremental sliding mode for underactuated systems with mismatched uncertainties[A]. American Control Conference, 2008 (ACC 2008)[C]. Seattle, Washington, USA, 2008. 532-537.

[9] LO J C, KUO Y H. Decoupled fuzzy sliding-mode control[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1998, 6(3): 426-435.

[10] 高丙团，贾智勇，陈宏钧，等. TORA的动力学建模与Backstepping控制[J]. 控制与决策，2007，22 (11)：1284-1288.
GAO B T, JIA Z Y, CHEN H J, et al. Dynamical modeling and backstepping control of TORA[J]. Control and Decision, 2007, 22(11): 1284-1288. (in Chinese)