粒子群优化算法变型：GLbest-PSO 算法

陈相托[1,2]，王惠文[3]，孙玥元[1,2]

（1. 北京航空航天大学中法工程师学院，北京 100191；
2. 巴黎中央理工学院，巴黎 92295；
3. 北京航空航天大学经济管理学院，北京 100191）

摘要：全局粒子群优化（global particles swarm optimization，Gbest-PSO）算法拥有较快的收敛速度，但粒子群体容易在局部过早收敛；而局部粒子群优化（local particles swarm optimization，Lbest-PSO）算法细化了粒子群对空间的探索，但是弱化了其最优解的聚拢效应。因此，研究尝试中和 Gbest-PSO 算法和 Lbest-PSO 算法在全局搜索和局部搜索方面各自的优点，提出 GLbest-PSO 算法模型，并希望以此获得一种兼有收敛速度和搜索细化的优化算法。通过仿真实验检验该算法的优化能力，并与其他几种经典的粒子群算法进行比较。结果表明，该算法在收敛速度和收敛效果上均有所提高，是一种有效的改进算法。

关键词：最优化；粒子群优化；全局–局部；邻域拓扑

中图分类号：O224　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1674-2850(2016)01-0075-06

A new variant of particle swarm optimization method: the GLbest-PSO

CHEN Xiangtuo[1,2], WANG Huiwen[3], SUN Yueyuan[1,2]

(1. *Ecole Centrale de Pekin*, *Beihang University*, *Beijing* 100191, *China*;
2. *Ecole Centrale Paris*, *Paris* 92295, *France*;
3. *School of Economics and Management*, *Beihang University*, *Beijing* 100191, *China*)

Abstract: Global particles swarm optimization (PSO), noted as Gbest-PSO, has a faster convergence, but it causes easily the premature and local convergence. However, the local PSO algorithm, noted as Lbest-PSO, makes the research in space more refined but weakens the effect of the optimal particles. In this paper, trying to neutralize the gathering effects of Gbest-PSO and Lbest-PSO, we have proposed a GLbest model in order to have an optimization algorithm, which is able to obtain both a fast convergence and a refined search in space. GLbest-PSO and some other variants are tested on a common used set of optimization functions and their capacities are compared in the end. The results show that the convergence speed and convergence effect of the propsosed algorithm are improved, which proved to be an effective method.

Key words: optimization; particles swarm optimization; global-local; topology neighborhood

0 引言

粒子群优化算法是由 KENNEDY 和 EBERHART 提出的一种基于群体的随机优化算法[1]。该算法也是受到社会行为学和社会心理学，以及自然界群体生物活动的现象启发所产生的一种算法。比如人类群体通过个体之间的信息传递完成工作任务，以及动物世界中鸟群或者鱼群搜寻食物的群体行为等。

正如其他启发式算法，如退火算法[2]、遗传算法[3]或蚁群算法[4]，在算法的初始化阶段，随机初始化一定数量可行解，然后按照一定的规则，经过多次迭代，在搜索空间中寻找最适合目标函数的可行解。

作者简介：陈相托（1990—），男，博士研究生，主要研究方向：最优化算法、复杂系统建模
通信联系人：王惠文，教授，主要研究方向：统计学. E-mail: wanghw@vip.sina.com

不过，算法不同的运行规则，决定了算法各自的运行机制。比如，在遗传算法的开始阶段，需要随机初始化一定数量的染色体作为目标函数的可行解，然后根据染色体之间的交叉互换、基因突变、自然选择等方式获得新的更优的染色体。而在粒子群算法中，各个可行解被看作搜索空间中的一个点，然后根据不同点之间的信息传递，使得粒子向最优区域聚集[1]。由于简单的运行机制和可操作性，粒子群算法在提出之后就获得了足够重视，并且得到了迅猛发展。不过在使用过程中，研究人员也意识到，当所研究的适应函数比较复杂，函数表面相对粗糙，或者局部最优点比较多时，该算法往往过快地在局部收敛而无法跳出，最终无法实现全局的最优[5]。

为让粒子群算法在面对复杂的目标函数时能够拥有更加细致的全局搜索能力，研究人员尝试通过多个不同的角度对 PSO 算法实现优化。总结起来，可以分成两类：第一类，通过调整算法的惯性常数和学习因子进行优化；第二类，通过引入邻域拓扑结构进行优化。由于提出了涉及一定邻域结构的全局–局部 PSO 算法，这里只对 PSO 的第二类改良进行论述。KENNEDY 等[6]尝试近千种不同的邻域拓扑结构，得到了冯诺依曼网格结构的通用性较强且适应大部分优化问题的结论；KENNEDY 等[7]还提出了全息粒子群（fully informed particle swarm，FIPS）算法，并基于不同的邻域拓扑结构，进行了仿真实验。冯诺依曼网格结构也是该文章推荐的结构之一。这里基于冯诺依曼邻域拓扑结构，定义一个中和的群体信息影响因子，提出一种新的算法——GLbest-PSO 算法，并通过仿真实验和算法比较，研究 GLbest-PSO 算法的性质。

1　粒子群优化算法及其变型

1.1　标准粒子群算法

粒子群优化算法是一种基于群体行为性质的随机迭代算法。该算法基于搜索空间 D^k 中一个容量为 n 的粒子群的活动对目标函数进行优化。在每次迭代过程中，根据一定规则，对粒子群的运动速度和位置进行更新。具体地讲，定义在任意时刻 t，对于任意粒子 i，其速度 $\boldsymbol{v}_i^t$ 会根据式（1）进行更新。

$$\boldsymbol{v}_i^t = w\cdot\boldsymbol{v}_i^{t-1} + c_1\cdot r_1(\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{x}_i^{t-1}) + c_2\cdot r_2(\boldsymbol{p}_{\mathrm{g}} - \boldsymbol{x}_i^{t-1}),\tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{x}_i^t$ 为粒子 i 在 t 时刻的位置；w 为惯性权重，作用是控制 t 时刻粒子 i 的速度 $\boldsymbol{v}_i^t$ 保留 $t-1$ 时刻的速度 $\boldsymbol{v}_i^{t-1}$ 的程度，或者表述为粒子保持原有运动趋势的程度；参数 c_1 和 c_2 称作学习因子，作用是控制该粒子的历史最优位置 $\boldsymbol{p}_i$ 以及群体中的历史最优位置 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{g}}$ 对 $\boldsymbol{v}_i^t$ 的影响。假设优化目标是实现适应函数的最小化，那么最优位置就表示令目标函数最小化的点；另外，系数 r_1 和系数 r_2 则是满足 $[0,1]$ 内均匀分布的随机数。

当所有粒子的速度更新完成之后，各个粒子 i 将根据式（2），对它们各自旧的位置 $\boldsymbol{x}_i^{t-1}$ 进行更新，得到新的位置 $\boldsymbol{x}_i^t$. 然后，分别以新的位置 $\boldsymbol{x}_i^t$ 求出各个粒子的新的适应度 $f(\boldsymbol{x}_i^t)$. 如果对于某个粒子 i，有 $f(\boldsymbol{x}_i^t) < f(\boldsymbol{p}_i)$，那么该粒子的历史最优位置就需要被 $\boldsymbol{x}_i^t$ 替代更新。同样，如果出现优于历史最优位置 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{g}}$ 的新位置，那么该位置也会被更新。

$$\boldsymbol{x}_i^t = \boldsymbol{x}_i^{t-1} + \boldsymbol{v}_i^t.\tag{2}$$

1.2　局部粒子群算法

由于受到人类社会关系学研究的启发，研究人员通过引入一些表示局部群体关系的拓扑结构来细化

对全局的搜索[6]。在这些结构中，每个粒子与周边的近邻粒子通过不同的方式联系在一起，这类模型称作 Lbest-PSO 模型。因此，在模型中，标准粒子的速度决定公式（1）就应该更新为

$$\boldsymbol{v}_i^t = w\cdot\boldsymbol{v}_i^{t-1} + c_1\cdot r_1(\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{x}_i^{t-1}) + c_2\cdot r_2(\boldsymbol{p}_{lk} - \boldsymbol{x}_i^{t-1}), \tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{p}_{lk}$ 为粒子 i 在局部邻域结构中的最优位置，参数 l 表示局部关系，参数 k 为粒子 i 所在的子群体的序号。通常情况下，根据粒子群在搜索空间中的实际距离[5]或粒子的序号来决定相应的邻域结构[6]。

1.3 FIPS 算法

KENNEDY 等[7]改变了过去 PSO 版本中“唯最优是从”的思路，提出 FIPS 算法的概念。简言之，在经典的“唯最优是从”的思路中，不论是 Gbest-PSO 算法还是 Lbest-PSO 算法，任意粒子 i 的速度总是受到来自群体关系结构中最优粒子的影响。而在 FIPS 算法中，该影响将被局部邻域拓扑中所有相连粒子的共同作用所取代。因此，在 FIPS 算法中，经典版中的速度变化公式（1）就需要修改为

$$\boldsymbol{v}_i^t = w\cdot\left[\boldsymbol{v}_i^{t-1} + c\cdot\sum_{n=1}^{N_i} r_n(\boldsymbol{p}_{nbr(n)} - \boldsymbol{x}_i^{t-1})\right], \tag{4}$$

其中，N_i 为 i 直接相连的粒子数量，通常将其称作拓扑结构的阶数；c 为学习因子，这里假设该邻域拓扑中，所有成员对粒子 i 速度影响的重要性是相同的。因此，在 FIPS 算法中，最优“邻居”效应平均分摊给与粒子 i 相连的所有粒子，解决了最优粒子的聚拢效应过强的问题。不过，最终最优粒子效应还是会随着群体之间的网络结构间接传递到网络中的每个角落。因此，从算法表述的角度看，FIPS 算法从一定程度上更加细化了离子群体对局部的搜索，但是收敛速度也因此变慢了。

笔者尝试了 1 340 多种不同的拓扑结构之后，得出了“最佳的拓扑结构则需要依实际情况而定”的结论。不过在所有的结构中，冯诺依曼网格结构是相对最适应的[7]。

2 创新粒子群算法：GLbest-PSO 算法

KENNEDY[8]对 Gbest-PSO 算法和不同版本的 Lbest-PSO 算法的优化能力进行了比较，得出了适应函数的性质决定算法模型的结论。具体地说，就是 Gbest-PSO 模型在适应函数相对比较简单、峰值较少或单峰值情况下的优化效果较好，比如说 Sphere 函数和 Rosenbrock 函数；而 Lbest-PSO 模型在适应函数相对复杂、局部解数量较多的情况下，优化效果更强。

根据之前的讨论，在 Gbest-PSO 算法中，全局最优粒子的聚拢效应太强，使得粒子群收敛的速度过快，导致粒子群整体易陷入局部最优无法跳出的问题；而 Lbest-PSO 算法虽然增强了局部搜索的能力，但是收敛效应太弱，收敛时间过长。那么有没有可能将这两类算法的思路结合起来，得到一种比 Gbest-PSO 算法的搜索更细致，又比 Lbest-PSO 算法的搜索更快速的算法呢？

于是研究尝试结合 Gbest-PSO 算法和 Lbest-PSO 算法，将速度决定公式中的群体影响因子定义成一个相对中和的因子—— $\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_{\mathrm{g}} + \boldsymbol{p}_{lk})$，从定义上既具有 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{g}}$ 的指向性，又具有 $\boldsymbol{p}_{lk}$ 的局部性。将该变形命名为 GLbest-PSO，而该变形的粒子速度决定公式（1）就需要更新为

$$\boldsymbol{v}_i^t = w\cdot\boldsymbol{v}_i^{t-1} + c_1\cdot r_1(\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{x}_i^{t-1}) + c_2\cdot r_2\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{p}_{\mathrm{g}} + \boldsymbol{p}_{lk}) - \boldsymbol{x}_i^{t-1}\right). \tag{5}$$

3　仿真实验设计与计算结果

为检验 GLbest-PSO 算法的收敛性质，将对 6 个经典的优化算法测试函数进行仿真计算。同时，还挑选了标准 PSO 算法、局部 PSO 算法及全息 PSO 算法中 5 个相对经典的算法变型进行对比实验。

3.1　测试函数

选取 Sphere、Rosenbrock、Rastrigin、Griewank、Schaffer 及 Ackley 这 6 个测试函数，具体的函数表达如下：

Sphere，
$$f_1(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 .$$

Rosenbrock，
$$f_2(x)=\sum_{i=1}^{n-1}(100\,(x_{i+1}-x_i^2)+(x_i-1)^2) .$$

Rastrigin，
$$f_3(x)=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-10\cos(2\pi x_i)+10) .$$

Griewank，
$$f_4(x)=\frac{1}{4\ 000}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\prod_{i=1}^{n}\cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)+1 .$$

Schaffer，
$$f_5(x)=\frac{1}{2}+\frac{\sin(\sqrt{x_1^2+x_2^2})^2-0.5}{[1.0+0.001(x_1^2+x_2^2)]^2} .$$

Ackley，
$$f_6(x)=-20\exp\left(-0.2\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\right)-\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos(x_i)\right)+\mathrm{e}+20 .$$

各个测试函数的参数设置如表 1 所示。

表 1　仿真实验设置

Tab. 1　Simulation experiment setup

函数名称	搜索空间维度	搜索范围	粒子数	最优点
Sphere	n=30	$[-100,100]^n$	40	$f(0,0,0,\cdots,0_n)=0$
Rosenbrock	n=30	$[-100,100]^n$	40	$f(1,1,1,\cdots,1_n)=0$
Rastrigin	n=30	$[-10,10]^n$	40	$f(0,0,0,\cdots,0_n)=0$
Griewank	n=30	$[-600,600]^n$	40	$f(0,0,0,\cdots,0_n)=0$
Schaffer	n=2	$[-100,100]^n$	40	$f(0,0)=0$
Ackley	n=30	$[-32,32]^n$	40	$f(0,0,0,\cdots,0_n)=0$

注：所有的仿真实验，均进行 100 次实验

3.2　测试算法的参数设定

CLERC 等[9]的研究表明，PSO 算法的参数设定对算法的收敛效果起了重要作用。因此，本文所涉及的 PSO 算法将会按照文献[9]进行设定。由于冯诺依曼 2-D 网格结构的适用性较强，在本文涉及邻域拓扑结构的情况下，大部分都是基于冯诺依曼 2-D 网格来定义粒子群体局部关系。

因此，该算法的具体参数设置如下。

对于标准 PSO 算法：$w=0.729\ 8$，$c_1=c_2=1.948$，记为 standard.

对于局部 PSO 算法，本文选取了 2 种不同的邻域拓扑：

1）最简单的环状结构。粒子按照序号排列成圆环，定义粒子 i 的邻域结构包含粒子 $i+1\bmod(m)$ 和粒子 $i-1\bmod(m)$，$w=0.729\ 8$，$c_1=c_2=1.948$，记为 Lbest-2.

2）冯诺依曼 2-D 网格结构。粒子排列成规则的网格结构，定义粒子 i 的邻域结构包含该粒子上下左右 4 个方向的粒子，$w=0.729\ 8$，$c_1=c_2=1.948$，记为 Lbest-4.

FIPS 算法：与 Lbest-PSO 算法一样，采用冯诺依曼 2-D 网格结构定义邻域拓扑，不过根据粒子 i 的邻域拓扑是否包含粒子 i 自身，又得到 FIPS 的 2 个版本。

全息算法 A：邻域包含自身粒子，$w=0.729\ 8$，$c=0.598\ 4$，记为 FIPS-5；

全息算法 B：邻域不包含自身粒子， $w=0.729\ 8$， $c=0.748\ 0$，记为 FIPS-4.

全局–局部粒子群算法: 采用冯诺依曼 2-D 网格结构定义邻域拓扑 $w=0.729\ 8$，$c_1=c_2=1.948$，记为 GLbest-4.

3.3 比较实验设计

在仿真实验中，将分别调用 6 种 PSO 算法及其变型，对 6 个测试函数进行测试，并且对该过程重复进行 100 次操作。最后，通过比较适应函数平均下降曲线对各个算法的优化能力进行评价。

3.4 实验结果和分析

对于单峰测试函数 Sphere 和 Rosenbrock，GLbest-PSO 算法的收敛能力表现较好，如图 1 和图 2 所示。尤其是在测试函数 Sphere 中，是所有变形中收敛速度最快、收敛效果最好的，甚至比 Gbest-PSO 的收敛速度还要快。

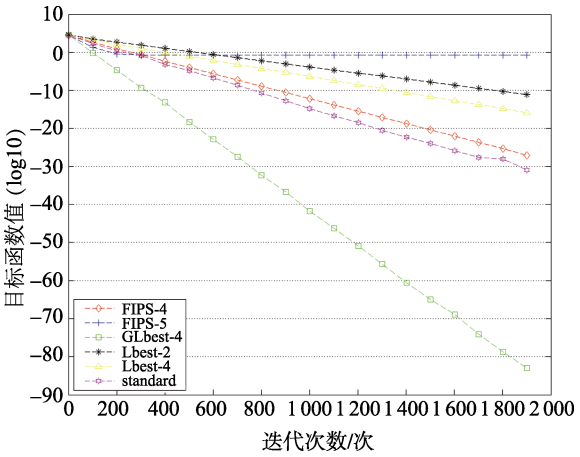


图 1 Sphere 函数测试结果（log10）

Fig. 1 Solution quality of Sphere (log10)

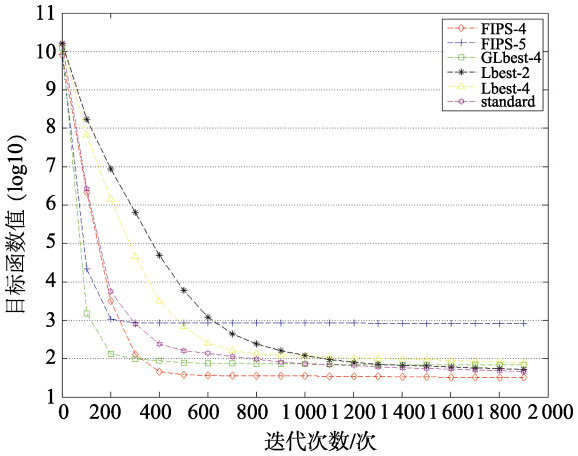


图 2 Rosenbrock 函数测试结果（log10）

Fig. 2 Solution quality of Rosenbrock (log10)

对于其他 4 个多峰值测试函数，如图 3～图 6 所示，虽然 GLbest-PSO 算法在初期的收敛速度上表现相对优异，下降速度更快，但在收敛效果上，还是比不上搜索更细致的经典 Lbest-PSO 算法或 FIPS 算法。不过在所有测试函数的优化结果中，不论在收敛速度还是在收敛效果上，GLbest-PSO 算法的表现始终优于标准 PSO 算法。

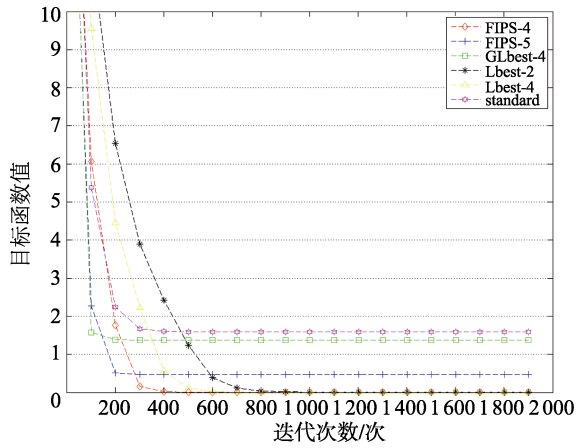


图 3 Ackley 函数测试结果

Fig. 3 Solution quality of Ackley

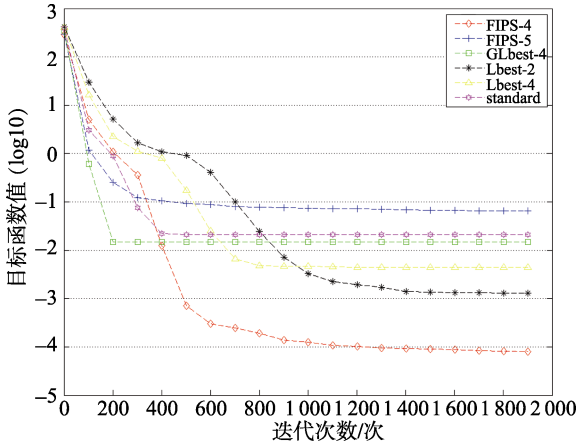


图 4 Griewank 函数测试结果（log10）

Fig. 4 Solution quality of Griewank (log10)

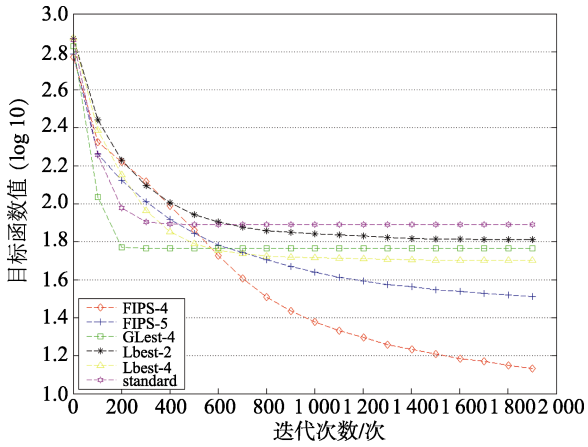


图 5　Rastrigin 函数测试结果（log10）
Fig. 5　Solution quality of Rastrigin (log10)

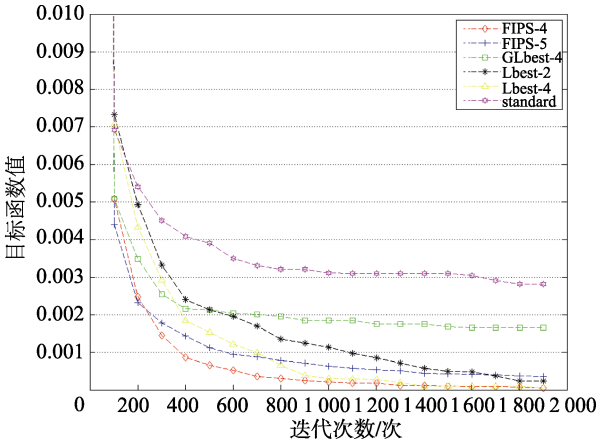


图 6　Schaffer 函数测试结果
Fig. 6　Solution quality of Schaffer

4　结论

针对粒子群算法中 Gbest-PSO 算法过早收敛及 Lbest-PSO 算法收敛速度慢的问题，将群体最优粒子和邻域拓扑中的局部最优粒子的聚拢效应进行中和，提出了一种新的全局–局部粒子群优化算法的思路。通过对 6 个经典优化算法测试函数的仿真计算，发现在单峰值函数的测试结果中，相对于经典的 PSO 模型，GLbest-PSO 算法不但有较强的收敛效果，而且拥有最快的收敛速度。而对于相对复杂的多峰测试函数，GLbest-PSO 同样遇到了早熟收敛的现象。总体来看，GLbest-PSO 算法相对于标准 PSO 算法，在收敛速度和收敛效果上均有所提高，是一种有效的改进算法。

在之后的研究中，可以从邻域拓扑结构和惯性常数 2 个角度进一步对该算法进行深入研究。

[参考文献] (References)

[1] KENNEDY J. Particle swarm optimization[M]//SAMMUT C, WEBB G I. Encyclopedia of Machine Learning. New York: Springer US, 2010: 760-766.

[2] ČERNÝ V. Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: an efficient simulation algorithm[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1985, 45(1): 41-51.

[3] LAWRENCE D. Handbook of genetic algorithms[M]. New York: Van Nostrand Reinhold, 1991.

[4] GUNTSCH M, MIDDENDORF M. A population based approach for ACO[M]//CAGNONI S, GOTTLIEB J, HART E, et al. Applications of Evolutionary Computing. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2002: 72-81.

[5] SUGANTHAN P N. Particle swarm optimiser with neighbourhood operator[C]//Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computation. Washington, DC: IEEE, 1999: 1958-1961.

[6] KENNEDY J, MENDES R. Population structure and particle swarm performance[C]//Proceedings of Congress on Evolutionary Computation. Washington: IEEE Computer Society, 2002.

[7] KENNEDY J, MENDES R. Neighborhood topologies in fully informed and best-of-neighborhood particle swarms[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews, 2006, 36(4): 515-519.

[8] KENNEDY J. Small worlds and mega-minds: effects of neighborhood topology on particle swarm performance[C]// Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computation. Washington, DC: IEEE, 1999: 1931-1934.

[9] CLERC M, KENNEDY J. The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(1): 58-73.