侧向周期加热腔体对流对格拉晓夫数的依赖性

宁利中[1]，李开继[2]，宁碧波[3]，田伟利[4]，张　珂[1]

（1. 西安理工大学省部共建西北旱区生态水利国家重点实验室，西安　710048；
2. 中交第二公路工程局有限公司，西安　710065；
3. 嘉兴学院建筑工程学院，浙江嘉兴　314001；
4. 上海大学美术学院，上海　200444）

摘要：通过流体力学方程组的数值模拟，研究了侧向周期加热条件下普朗特数 $Pr=0.703$ 的流体对流对格拉晓夫数 Gr 的依赖性。结果表明：随着格拉晓夫数 Gr 的增加，腔体中出现 3 种对流斑图阶段，即稳态对流、周期性对流和非周期性对流。从稳态对流向周期性对流过渡的临界格拉晓夫数 $Gr=1.448\times10^4$，从周期性对流向非周期性对流过渡的临界格拉晓夫数 $Gr=1.348\times10^6$。在稳态对流阶段，对流特性参数（水平流速和垂向流速）随着时间不变化，在两个高温度差区域各存在一个稳定的对流圈。在周期性对流阶段，对流特性参数随着时间周期性变化。两个低温度差区域各存在多个稳定的对流圈，在两个高温度差区域各存在一个周期移动的对流圈，移动周期随着格拉晓夫数 Gr 的增加而减小。两个高温度差区域的上部存在明显的温度羽。在非周期性对流阶段，对流特性参数随着时间非周期性变化。在 3 个对流阶段的变化范围内，平均努塞尔数、最大水平流速和最大垂向流速随着格拉晓夫数 Gr 的增加而增加。

关键词：水利工程基础学科；侧向周期加热对流；数值模拟；稳态对流；周期性对流；非周期性对流
中图分类号：TV13　　**文献标识码：**A
文章编号：1674-2850(2023)01-0070-09　　**开放科学（资源服务）标识码（OSID）：**
DOI：10.3969/j.issn.1674-2850.2023.01.008

Dependence of convection in a lateral periodic heating cavity on Grashof number

NING Lizhong[1], LI Kaiji[2], NING Bibo[3], TIAN Weili[4], ZHANG Ke[1]

(1. *State Key Laboratory of Eco-hydraulics in Northwest Arid Region of China*, *Xi'an University of Technology*, *Xi'an*　710048, *China*;
2. *CCCC Second Highway Engineering Bureau Co.*, *Ltd.*, *Xi'an*　710065, *China*;
3. *College of Civil Engineering and Architecture*, *Jiaxing University*, *Jiaxing*, *Zhejiang*　314001, *China*;
4. *College of Fine Arts*, *Shanghai University*, *Shanghai*　200444, *China*)

Abstract: The dependence of convection under lateral periodic heating with Prandtl number $Pr = 0.703$ on Grashof number Gr is studied by numerical simulation of hydrodynamic equations.The results show that with the increase of Grashof number, there are three stages of convection pattern in the cavity, namely steady convection, periodic convection and non-periodic convection. The critical Graschof number for transition from steady convection to periodic convection is $Gr = 1.448\times10^4$, and the critical Graschof number for transition from periodic convection to non-periodic convection is $Gr = 1.348\times10^6$. In the steady convection stage, the convection characteristic parameters (horizontal velocity and vertical velocity) do not change with time, and there is a stable current loop in two regions with high temperature difference. In the periodic convection stage, the convective characteristic parameters change periodically with time. Several stable

作者简介：宁利中（1961—），男，教授，主要研究方向：对流动力学与高速水力学. E-mail: ninglz@xaut.edu.cn

convective rolls exist in the two regions with low temperature difference, and there is a periodic moving current loop in the two regions with high temperature difference. The moving period decreases with the increase of Grashof number. The temperature plume exists in the upper part of two regions with high temperature difference. In the non-periodic convection stage, the convective characteristic parameter changes aperiodically with time. Within the range of three convective stages, the average Nusselt number, the maximum horizontal velocity and the maximum vertical velocity increase with the increase of Grashof number.

Key words: basic subject of hydraulic engineering; convection of lateral periodic heating; numerical simulation; steady convection; periodic convection; non-periodic convection

0 引言

从底部加热的腔体中流体层的自然对流问题开始于 1900 年 BENARD 对底部加热薄层流体的实验。从那时起，人们开始了对自然对流的研究[1~2]。后来，RAYLEIGH 通过理论分析研究了从底部加热的腔体中流体层自然对流的稳定性问题，提出了对流发生的无因次控制参数。因此，这个问题被称为 Rayleigh-Benard 对流。半个世纪后，BATCHELOR[3]于 1954 年研究了侧向加热腔体的自然对流问题。关于 Rayleigh-Benard 对流的研究，已经从单流体发展到混合流体。特别在混合流体分离比为负值情况下，对流系统出现各种行波状态和局部结构[4~16]。进一步，文献[17]研究了底部周期加热对对流斑图和对流结构的影响。关于侧向加热腔体的自然对流问题的研究，多关注的是小高宽比均匀加热情况下，边界层的发展、边界层的结构、对流斑图的成长、对流的稳定性及传热特性[18~25]。文献[20]较早开展了大高宽比腔体侧向均匀加热情况下的对流问题。最近几年，文献[26]～文献[27]研究了大高宽比腔体局部加热情况下的对流问题，发现它有一些新的特点。文献[28]～文献[29]进一步探讨了大宽高比腔体侧向周期加热情况下的对流特性和传热特性。因此，进一步研究大高宽比腔体在侧向周期加热对流条件下的斑图演化具有重要的意义。

本文通过流体力学方程组的数值模拟，研究了侧向周期加热条件下普朗特数 $Pr=0.703$ 的流体对流对格拉晓夫数 Gr 的依赖性。发现，随着格拉晓夫数 Gr 的增加，腔体中出现 3 种对流斑图阶段，即稳态对流、周期性对流和非周期性对流。从稳态对流向周期性对流过渡的临界格拉晓夫数 $Gr=1.448\times10^4$，从周期性对流向非周期性对流过渡的临界格拉晓夫数 $Gr=1.348\times10^6$。研究了 3 种对流斑图阶段对流斑图的结构和特性。

1 数学物理模型

1.1 流体力学方程组

基于 Boussinesq 假定，侧向加热对流问题的流体力学方程组为

$$\nabla \boldsymbol{U}=0\ , \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\left(\boldsymbol{U}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{U}=-\nabla\frac{p}{\rho_0}+\nu\nabla^2\boldsymbol{U}-\alpha\left(T-T_0\right)\boldsymbol{g}\ , \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\left(\boldsymbol{U}\cdot\nabla\right)T=\kappa\nabla^2T\ , \tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{U}(u,0,w)$ 为速度矢量场；T 为温度；p 为压强；ν 为运动黏性系数；t 为时间；κ 为热扩散系数，

$\kappa=\dfrac{\lambda}{\rho_0 C_p}$，$\lambda$ 为导热系数；C_p 为比热；ρ 为密度；$\boldsymbol{g}=-g\boldsymbol{e}_y$，$g$ 为重力加速度，$\boldsymbol{e}_y$ 表示 y 轴单位矢量，平行于 y 轴向上；α 为体积膨胀系数，$\alpha=-\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial\rho(T,p)}{\partial T}$。下标 0 表示相应物理量的参考值。

1.2　边界条件与初始条件

速度及温度的边界条件：当 y=0, Γ 时，$u=w=0$；当 x=0, d 时，$u=w=0$；当 y=0, Γ 时，$\partial T/\partial y=0$；当 $x=0$ 时，$T=T_{\mathrm{L}}$；当 $x=d$ 时，$T=T_{\mathrm{R}}$。其中，u、w 分别表示水平流速、垂向流速；Γ 为计算区域高度；d 为计算区域宽度；T_{L} 为左壁面温度；T_{R} 为右壁面温度。

左壁面温度保持恒定，右壁面温度 T_{R} 周期变化，即

$$T_{\mathrm{R}}=T_{\mathrm{L}}+\frac{\Delta T'}{2}\sin\left(\frac{\pi}{n}y\right),\tag{4}$$

$$T_0=\frac{1}{2}(T_{\mathrm{L}}+T_{\mathrm{Rmax}}),\tag{5}$$

其中，$\Delta T'=T_{\mathrm{Rmax}}-T_{\mathrm{L}}$，$T_{\mathrm{Rmax}}$ 表示右壁面最大温度；n 为系数。

初始流速条件为 $u=w=0$，初始温度为边壁面突然加温。

腔体的高宽比 $A=\Gamma/d$，格拉晓夫数 $Gr=\dfrac{\alpha g d^3\Delta T}{v^2}$，普朗特数 $Pr=v/\kappa$ 是系统的控制参数。计算中 $A=10$，$d=6$ cm，$Pr=0.703$，侧壁面正弦周期加热。为讨论方便，对腔体尺寸进行量纲归一化处理，即 $Y=y/d$，$X=x/d$。

1.3　数值方法

利用有限容积法对流体力学方程组进行离散，采用 SIMPLE 算法求解流体方程组，对流项采用二阶迎风格式，时间采用一阶隐格式。采用均匀交错网格系统，网格尺寸分为 $\Delta x=\Delta y=d/20$ 和 $\Delta x=\Delta y=d/30$。文献[25]在 $Gr=5.700\ 4\times10^4$ 情况下，对两种网格尺寸进行了仔细的比较分析，发现特征量很接近。因此，采用 $\Delta x=\Delta y=d/20$。时间步长为 0.01 s。本文数值模拟采用 Fluent 软件。

2　侧向周期加热腔体对流的格拉晓夫数依赖性

2.1　对流斑图的稳定性判断与稳态对流斑图

为了判断对流场的稳定性，计算中观察了对流参数的变化。图 1a 给出了 $Gr=1.348\times10^4$ 时腔体垂向流速随时间的变化。可以看出，当 $t<10$ s 时垂向流速急剧增加，达最大值，10 s $<t<$ 35 s 时垂向流速迅速减小，在 35 s $<t<$ 80 s 振动着缓慢减小，当 $t>80$ s 以后，垂向流速达到了稳定值，这时，可以认为对流已经稳定。图 1b 的水平流速 u 与图 1a 的垂向流速有着类似的规律。因此，图 1 的两个特征量都可以作为对流稳定的判据。由于对流稳定以后，两个特征量都稳定在不同的常数值，不再随着时间变化，可以认为对流处于稳态对流阶段。因此，可以用对流特征量随着时间的变化来判断对流斑图的转化。

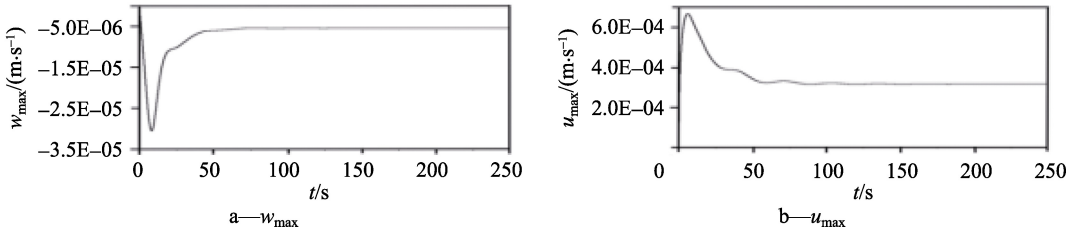


图 1 $Gr = 1.348\times10^4$ 时对流参数的时间依赖性

Fig. 1 Time dependence of convection parameter at $Gr = 1.348\times10^4$

当对流稳定以后，做出了 $Gr = 1.348\times10^3$ 时的稳态对流场分布图，如图 2 所示。腔体的右壁面为两个周期的正弦周期加热，在 2 个温度高的部位，流线图是 2 个封闭的对流圈；温度是与右壁面构成的半封闭的等值线图；垂向流速在每个温度高的部位是左右并列的两个封闭的等值线圈，因此，腔体中共有 4 个等值线圈；水平流速在每个温度高的部位是上下并列的 2 个封闭的等值线圈，因此，腔体中也有 4 个等值线圈；速度矢量图在 2 个温度高的部位是两个环流圈，在环流圈的左右边缘中央，垂向流速最大，水平流速最小，在环流圈的上下边缘中央，垂向流速最小，水平流速最大。环流中心处的速度最小，边缘处流速大。可以看出，速度矢量图和流线图很好得表征了对流斑图特性。

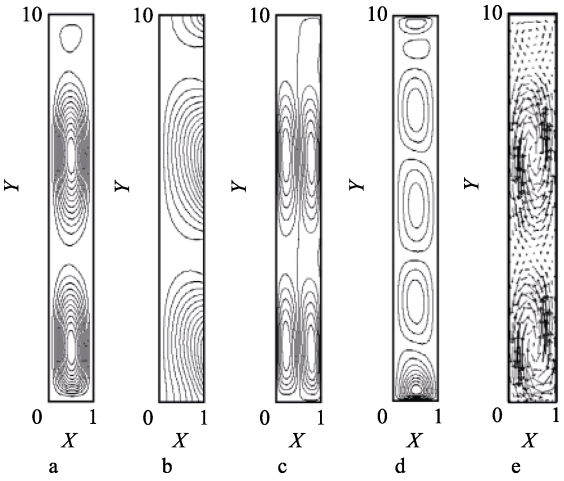


图 2 $Gr = 1.348\times10^3$ 时对流空间分布

Fig. 2 Spatial distribution of convection at $Gr = 1.348\times10^3$

a—流线；b—温度；c—垂向流速；d—水平流速；e—速度矢量

a-Streamline; b-Temperature; c-Vertical velocity; d-Horizontal velocity; e-Velocity vector

2.2 周期性判断与周期性斑图

当格拉晓夫数增加到 $Gr = 1.448\times10^4$ 时，对流参数随时间的变化如图 3 所示。可以看出，图 3a 的垂向流速首先随着时间迅速增加，然后振动着减小，振动的周期和振幅随着时间不断调整，最后过渡到振动的周期和振幅稳定的周期变化阶段。图 3b 的水平流速也有类似规律，经过初期的急剧变化，然后调整阶段，最后进入稳定的周期变化阶段。与图 2 的稳态对比后可以认为，格拉晓夫数 $Gr = 1.448\times10^4$ 时，系统进入到周期变化阶段，取 $Gr = 1.448\times10^4$ 为过渡到周期阶段的临界点。

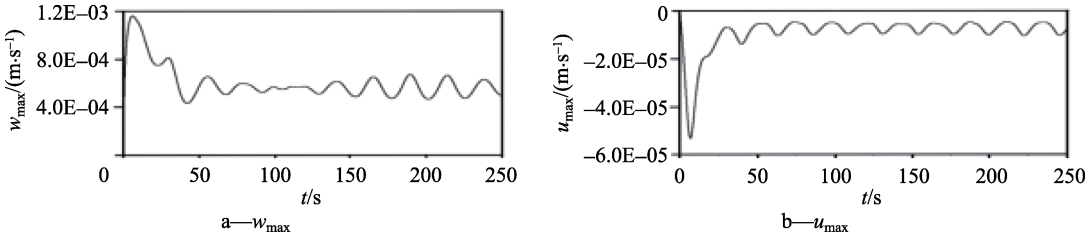


图 3 $Gr = 1.448\times10^4$ 时对流参数的时间依赖性

Fig. 3 Time dependence of convection parameter at $Gr = 1.448\times10^4$

当格拉晓夫数增加到 $Gr = 1.348\times10^5$ 时，对流参数随时间的变化如图 4 所示。对流经过一段时间的调整后，在 $t = 60$ s 左右对流稳定下来。对流垂向流速和水平流速都围绕相应的固定值振动，按大概 15 s

的周期做周期性变化。

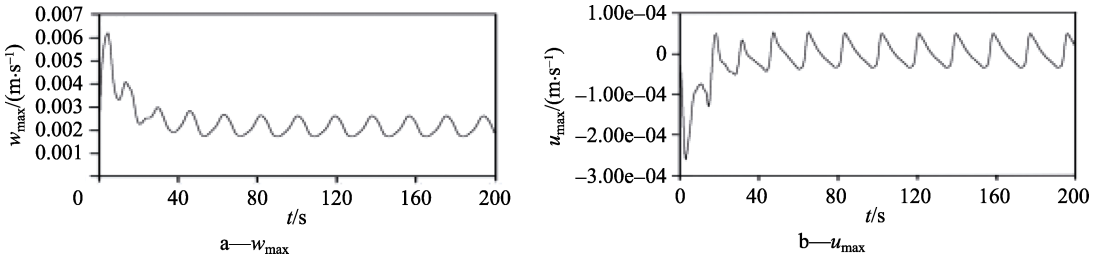


图 4　$Gr = 1.348\times10^5$ 时对流参数的时间依赖性

Fig. 4　Time dependence of convection parameter at $Gr = 1.348\times10^5$

图 5 是当格拉晓夫数增加到 $Gr = 6.739\ 8\times10^5$ 时一个周期内腔体中的流线随着时间的变化。由左向右，每个框子的时间间隔为 2 s。可以看出，在 $2.5 < Y < 5$ 及 $7.5 < Y < 10$ 的两个低温度差区域，基本保持 2 个或者 3 个对流圈，不随时间变化。在 $0 < Y < 2.5$ 及 $5 < Y < 7.5$ 的 2 个高温度差区域，为对流圈周期变化的对流区域。变化周期大概为 8 s。对比图 4 与图 5 可以看出，随着格拉晓夫数增加，对流圈周期变化阶段的周期变小。

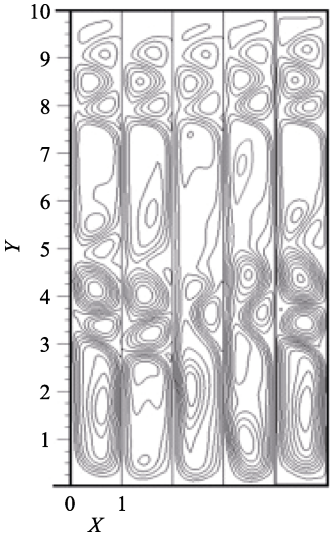


图 5　$Gr = 6.739\ 8\times10^5$ 时一个周期内的腔体内流线的变化

Fig. 5　Variation of streamlines in a cavity in one cycle at $Gr = 6.739\ 8\times10^5$

2.3　非周期性特性

格拉晓夫数继续增加到 $Gr = 1.348\times10^6$，对流参数随时间的变化如图 6 所示。垂向流速和水平流速经过大约 $t = 25$ s 的初始阶段调整，对流稳定下来。垂向流速和水平流速都围绕相应的固定值振动，但随着时间的变化是非周期的。与图 5 的周期变化阶段对比后可以认为，格拉晓夫数 $Gr = 1.348\times10^6$ 时，系统进入到非周期变化阶段，取 $Gr = 1.348\times10^6$ 为周期阶段向非周期阶段过渡到的临界点。

2.4　格拉晓夫数对对流斑图的影响

为了分析对流斑图随着格拉晓夫数的变化，取一组格拉晓夫数 Gr 进行了计算，给出不同格拉晓夫数时腔体内流线的变化，如图 7 所示。可以看出，在图 7a～图 7d 对流稳态阶段，腔体中的流线图基本是 2 个环流圈。在图 7e～图 7g 的周期阶段，$2.5 < Y < 5$ 及 $7.5 < Y < 10$ 的两个低温度差区域，是多个对流圈。在 $0 < Y < 2.5$ 及 $5 < Y < 7.5$ 的两个高温度差区域，是一个周期变化的大对流圈，如图 5 所示。这与对流稳态阶段对流圈的位置基本一致。腔体内总的对流圈的数量较稳态阶段增加，但在周期阶段保持为常数。在图 7h 中，系统进入非周期阶段。两个低温度差区域的对流圈数量进一步增加，对流圈等值线梯度变大。两个高温度差区域，对流圈等值线沿左右壁面的梯度变大，而且两个对流圈上部等值线的梯度明显大于下部等值线的梯度，流线弯曲程度变大。

图 8 给出了与图 7 对应的不同格拉晓夫数时的温度等值线图。在对流稳态阶段，温度是与右壁面构成的半封闭的等值线图。在周期阶段，$0 < Y < 2.5$ 及 $5 < Y < 7.5$ 的两个高温度差区域的上部存在明显的温度羽。在非周期阶段，除了两个高温度差区域的上部存在明显的温度羽外，两个低温度差区域的等值线圈中也产生了明显的温度羽。

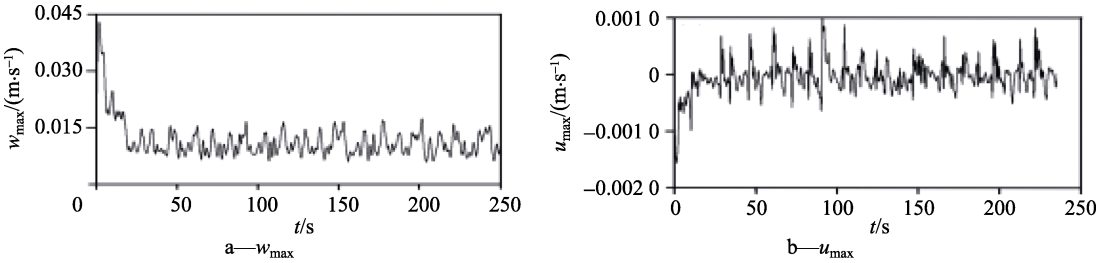


图 6 $Gr = 1.348\times10^6$ 时对流参数的时间依赖性

Fig. 6 Time dependence of convection parameter at $Gr = 1.348\times10^6$

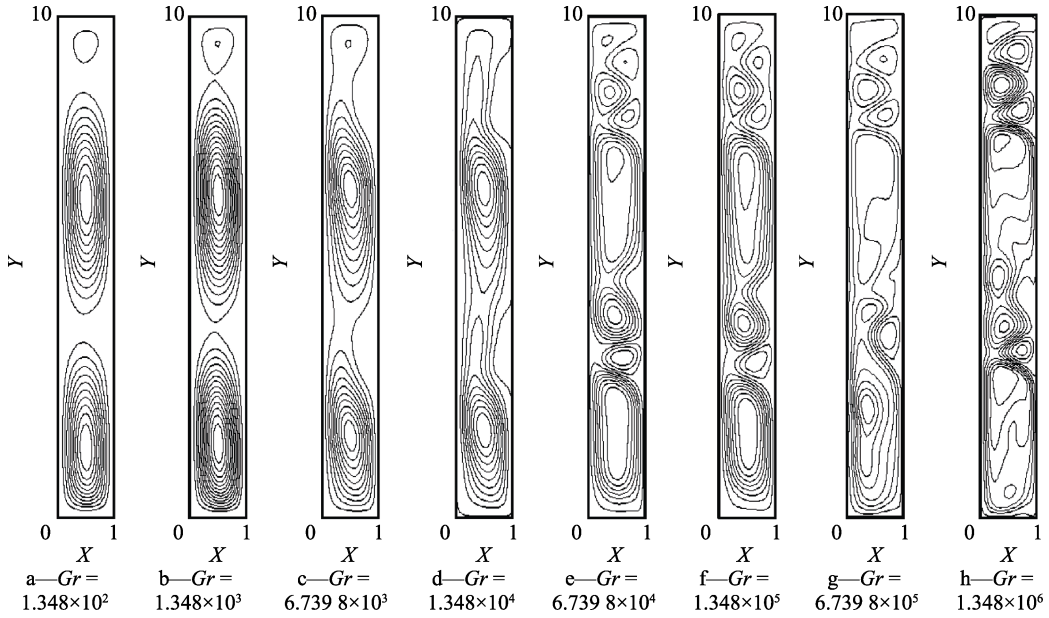


图 7 不同 *Gr* 下流线

Fig. 7 Streamline at different *Gr*

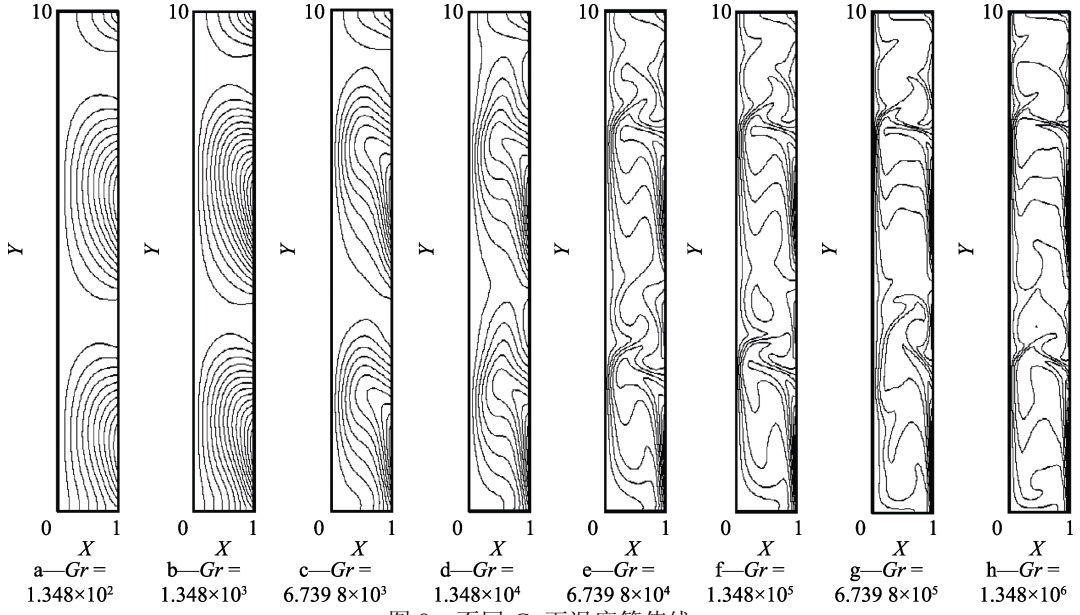


图 8 不同 *Gr* 下温度等值线

Fig. 8 Temperature contour at different *Gr*

2.5　对流特征物理量随着格拉晓夫数的变化

前面的讨论说明在格拉晓夫数的较大变化范围内，对流存在稳态阶段、周期阶段和非周期阶段的 3 个阶段，但把热壁面平均努塞尔数 $\overline{Nu}$、垂向最大流速和水平最大流速等对流参数点绘在图 9 的对流参数点绘随格拉晓夫数 Gr 的变化中，可以发现，在 3 个阶段范围内，平均努塞尔数 $\overline{Nu}$ 基本在同一条曲线上。说明 3 个阶段范围内传热具有同一特性。垂向最大流速和水平最大流速也有同样的规律，基本在各自的曲线上。热壁面平均努塞尔数 $\overline{Nu}$ 随格拉晓夫数 Gr 增大而增大。垂向最大流速和水平最大流速也随格拉晓夫数 Gr 增大而增大。

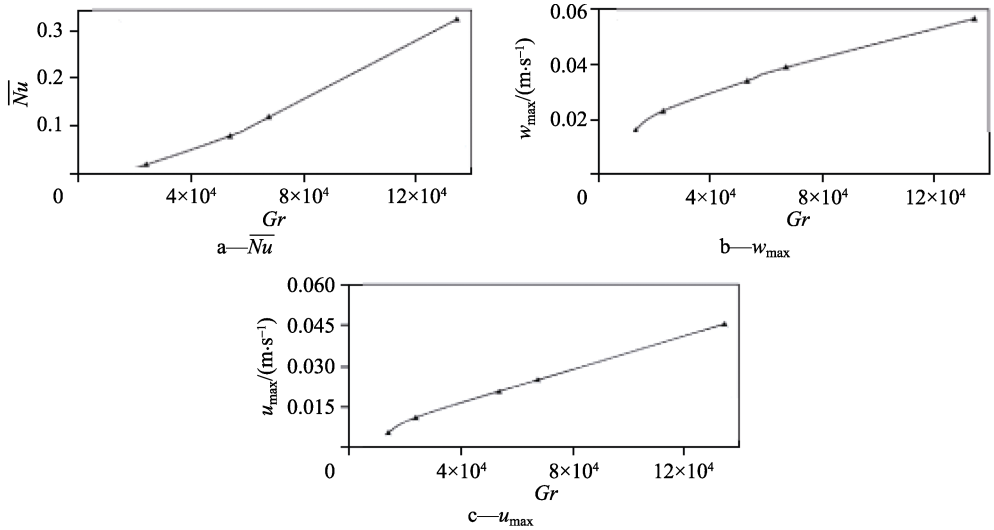


图 9　对流参数的 Gr 依赖性

Fig. 9　Gr dependence of convection parameter

3　结论

通过流体力学方程组的数值模拟，研究了侧向周期加热条件下普朗特数 Pr = 0.703 的流体对流对格拉晓夫数 Gr 的依赖性，可以得出如下结论：

1）在侧向周期加热的矩形腔体内，随着格拉晓夫数 Gr 的增加，出现 3 种对流斑图，即稳态对流斑图、周期性对流斑图和非周期性对流斑图。从稳态对流向周期性对流过渡的临界格拉晓夫数 Gr = 1.448×10^4，从周期性对流向非周期性对流过渡的临界格拉晓夫数 $Gr = 1.348\times10^6$。

2）在稳态对流阶段，水平流速和垂向流速随着时间不变化，在两个高温度差区域各存在一个稳定的对流圈。在两个低温度差区域没有对流圈出现。

3）在周期性对流阶段，水平流速和垂向流速随着时间周期性变化。两个低温度差区域各存在多个稳定的对流圈。在两个高温度差区域各存在一个周期移动的大对流圈。两个高温度差区域的上部存在明显的温度羽。对流圈的移动周期随着格拉晓夫数 Gr 的增加而减小。

4）在非周期性对流阶段，水平流速和垂向流速随着时间非周期性变化。两个低温度差区域各存在多个稳定的对流圈。在两个高温度差区域各存在一个大对流圈。除了两个高温度差区域的上部存在明显的温度羽外，两个低温度差区域的等值线圈中也产生了明显的温度羽。

5）在 3 个对流阶段的变化范围内，平均努塞尔数 $\overline{Nu}$、最大水平流速和最大垂向流速位于相应的曲线上，说明在 3 个对流阶段的变化范围内具有相同的变化特性。并且他们随着格拉晓夫数 Gr 的增加而增加。

[参考文献] (References)

[1] CROSS M C, HOHENBERG P C. Pattern formation outside of equilibrium[J]. Reviews of Modern Physics, 1993, 65(3): 851-1112.

[2] BODENSCHATZ E, PESCH W, AHLERS G. Recent developments in Rayleigh-Bénard convection[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 2000, 32: 709-778.

[3] BATCHELOR G K. Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1954, 12(3): 209-233.

[4] TARAUT A V, SMORODIN B L, LUCKE M. Collisions of localized convection structures in binary fluid mixtures[J]. New Journal of Physics, 2012, 14(9): 093055.

[5] MERCADER I, BATISTE O, ALONSO A, et al. Convectons, anticonvectons and multiconvectons in binary fluid convection[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2011, 667: 586-606.

[6] NING L, HARADA Y, YAHATA H. Localized traveling waves in binary fluid convection[J]. Progress of Theoretical Physics, 1996, 96(4): 669-682.

[7] MERCADER I, BATISTE O, ALONSO A, et al. Travelling convectons in binary fluid convection[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2013, 722: 240-266.

[8] WATANABE T, IIMA M, NISHIURA Y. Spontaneous formation of travelling localized structures and their asymptotic behaviours in binary fluid convection[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2012, 712: 219-243.

[9] MERCADER I, BATISTE O, ALONSO A, et al. Convectons in periodic and bounded domains[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2011, 42: 586-606.

[10] 宁利中，宁碧波，郝建武，等. 长矩形腔体中混合流体的对称对传波[J]. 应用力学学报，2021，38（6）：2392-2397.
NING L Z, NING B B, HAO J W. et al. Symmetrical counterpropagating waves of binary fluid mixture in a long rectangular cavity[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2021, 38(6): 2392-2397. (in Chinese)

[11] 齐昕，宁利中，余荔，等. 双局部行波斑图的形成与时空结构[J]. 西安理工大学学报，2016，32（1）：110-114.
QI X, NING L Z, YU L, et al. The formation and spatio-temporal structure of doubly localized traveling wave pattern[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2016, 32(1): 110-114. (in Chinese)

[12] 宁利中，张迪，宁碧波，等. 具有水平流动的 Rayleigh-Bénard 对流进口段的特性分析[J]. 应用力学学报，2020，37（3）：1260-1265.
NING L Z, ZHANG D, NING B B, et al. Characteristics of entrance region in Rayleigh-Bénard convection with horizontal flow[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2020, 37(3):1260-1265. (in Chinese)

[13] 宁利中，张珂，宁碧波，等. 底部加热的两板间水平流动进口段流动特性分析[J]. 水利水运工程学报，2019（4）：58-62.
NING L Z, ZHANG K, NING B B, et al. Analysis of entrance region of horizontal flow between two plates heated from bottom[J]. Hydro-Science and Engineering, 2019(4): 58-62. (in Chinese)

[14] 张淑芸，宁利中，周倩，等. 重力变调作用对 Rayleigh-Benard 对流的影响[J]. 水资源与水工程学报，2011，22（2）：40-43.
ZHANG S Y, NING L Z, ZHOU Q, et al. Influence of gravity modulation on Rayleigh-Benard convection[J]. Journal of Water Resources & Water Engineering, 2011, 22(2): 40-43. (in Chinese)

[15] 宁利中，袁喆，宁碧波，等. 摆动行波及其向定常对流的过渡[J]. 黑龙江大学工程学报，2022，13（1）：1-6.
NING L Z, YUAN Z, NING B B, et al. Undulation traveling wave and its transition to stationary overturning convection[J]. Journal of Engineering of Heilongjiang University, 2022, 13(1): 1-6. (in Chinese)

[16] ZHAO B X, TIAN Z F. Numerical investigation of binary fluid convection with a weak negative separation ratio in finite containers[J]. Physics of Fluids, 2015, 27: 074102.

[17] 宁利中，胡彪，周洋，等. 底部周期加热的局部对流斑图[J]. 应用力学学报，2016，33（4）：684-689.
NING L Z, HU B, ZHOU Y, et al. Patterns of localized convection heated periodically from below[J]. Chinese Journal of

Applied Mechanics, 2016, 33(4): 684-689. (in Chinese)

[18] PATTERSON J C, IMBERGER J. Unsteady natural convection in a rectangular cavity[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1980, 100: 65-86.

[19] IVEY G N. Experiments on transient natural convection in a cavity[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1984, 144: 389-401.

[20] YAHATA H. Thermal convection in a vertical slot with lateral heating[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1997, 66(11): 3434-3443.

[21] XU F, PATTERSON J C, LEI C. Heat transfer through coupled thermal boundary layers induced by a suddenly generated temperature difference[J]. International Journal of Heat & Mass Transfer, 2009, 52(21-22): 4966-4975.

[22] XU F, PATTERSON J C, LEI C. On the double-layer structure of the thermal boundary layer in a differentially heated cavity[J]. International Journal of Heat & Mass Transfer, 2008, 51(15-16): 3803-3815.

[23] XU F, PATTERSON J C, LEI C. Temperature oscillations in a differentially heated cavity with and without a fine on the sidewall[J]. International Communications in Heat & Mass Transfer, 2010, 37(4): 350-359.

[24] XU F. Convective instability of the vertical thermal boundary layer in a differentially heated cavity[J]. International Communications in Heat & Mass Transfer, 2014, 52(3): 8-14.

[25] 徐丰，崔会敏. 侧加热腔内的自然对流[J]. 力学进展，2014，44（1）：1-40.
XU F, CUI H M. Natural convection in a differentially heated cavity[J]. Advances in Mechanics, 2014, 44(1): 1-40. (in Chinese)

[26] 宁利中，张迪，宁碧波，等. 侧向局部加热对流的周期性[J]. 应用数学和力学，2020，41（2）：125-133.
NING L Z, ZHANG D, NING B B, et al. Periodicity of convection under lateral local heating[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2020, 41(2): 125-133. (in Chinese).

[27] 李开继，宁利中，宁碧波，等. 格拉晓夫数 *Gr* 对侧向局部加热腔体内对流结构的研究[J]. 力学季刊，2016，37（1）：131-138.
LI K J, NING L Z, NING B B, et al. Effect of Grashof number *Gr* on convection structure of rectangular cavity heated locally from side[J]. Chinese Quarterly Mechanics, 2016, 37(1): 131-138. (in Chinese)

[28] 李开继，宁利中，宁碧波，等. 侧壁面正弦加热条件下自然对流研究[J]. 应用力学学报，2017，34（4）：641-646.
LI K J, NING L Z, NING B B, et al. Study on natural convection sinusoidal heating from side[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2017, 34(4): 641-646. (in Chinese)

[29] 李开继，宁利中，王永起，等. 侧向局部加热腔体内对流时空结构的研究[J]. 应用力学学报，2016，33（3）：401-406.
LI K J, NING L Z, WANG Y Q, et al. Spatio-temporal structure of the convection heated locally from side[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2016, 33(3): 401-406. (in Chinese)